Комплексні числа

Щоб будь-яке квадратне рівняння мало корені приходиться розширювати множину дійсних чисел, добавляючи до неї нові числа. Ці нові числа разом з дійсними утворюють множину, яку називають множиною комплексних чисел і позначають буквою *C*. Якщо введені комплексні числа, то рівняння $x^2 = -1$ повинно мати корінь. Цей корінь позначають буквою i та називають уявною одиницею. Отже, i — це таке комплексне число, що $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Комплексними числами називають вирази виду $\boldsymbol{a + bi}$, де a і b — дійсні числа, i — таке комплексне число, що $i^2 = -1$.

Число α називається дійсною частиною комплексного числа $a + bi$, число b — його уявною частиною.

Наприклад, комплексне число $2 + 3i$ має дійсну частину, яка дорівнює 2, а уявна частина дорівнює 3.

Будь-яке дійсне число можна подати у вигляді комплексного числа з уявною частиною рівною 0. Наприклад:

$\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$; $-5 = -5 + 0i$ і т. д.

Два комплексних числа $a + bi$ та $c + di$ називаються рівними, якщо $a = c$ та $b = d$, тобто, якщо рівні їх дійсні і уявні частини.

Наприклад, $\frac{1}{2} + \sqrt{9}\,i = \frac{2}{4} + 3i$, оскільки $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ і $\sqrt{9} = 3$.

Арифметичні дії над комплексними числами визначаються так, щоб всі властивості цих дій були такими ж, як і для дійсних чисел (переставний і сполучний закони додавання і множення, розподільний закон множення та ін.).

Тому дії над комплексними числами $a + bi$ виконуються так, як і дії над многочленами, вважаючи, що $i^2 = -1$.

$$\boxed{\begin{gathered}(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;\\ (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;\\ (a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;\\ \frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.\end{gathered}}$$

Наприклад. Виконайте дії:

1) $(3 - 5i) + (2 + i) = 3 - 5i + 2 + i = (3 + 2) + (-5i + i) = 5 - 4i;$

2) $(3 - 5i) - (2 + i) = 3 - 5i - 2 - i = (3 - 2) + (-5i - i) = 1 - 6i;$

3) $(4 + 7i)(2 - i) = 8 + 14i - 4i - 7i^2 = 8 + 14i - 4i + 7 = -(8+7)+(14i-4i)-15+10i;$

4) $\dfrac{2+3i}{2-3i} = \dfrac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{4+12i+9i^2}{4-(3i)^2} = \dfrac{4+12i-9}{4+9} = \dfrac{-5+12i}{13} = -\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i.$

Використовуючи рівність $i^2 = -1$, квадратні корені з від ємних чисел прийнято записувати так: $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-4} = i\cdot\sqrt{4} = 2i$ і т. д. Отже, $\sqrt{a}$ визначений для будь-якого дійсного числа a (додатного, від'ємного і нуля). Тому квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c — дійсні числа, $a \neq 0$ у випадку $D < O$ має два корені в множині комплексних чисел, які знаходяться за формулою

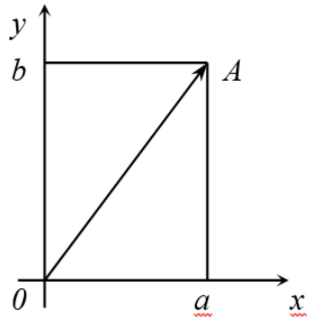
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Приклад. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Розв'язання

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Геометричне зображення комплексного числа. Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини. Можливість такого зображення грунтується на ототожненні множини комплексних чисел $a + bi$ множини пар дійсних чисел (a,b), які в прямокутній системі координат Oxy можна трактувати як координати точок площини.



Далі, з кожною точкою А координатної площини Oxy можна зв'язати вектор $\overrightarrow{OA}$, який виходить з початку координат і закінчується у точці А.

Тому комплексні числа допускають те одну геометричну інтерпретацію: кожне комплексне число $a + bi$ можна геометричне інтерпретувати як вектор $\overrightarrow{OA}$ з координатами $(a;b)$. Координати вектора $\overrightarrow{OA}$ при цьому будуть такими ж, як і координати точки A, а саме $(a;b)$.

<u>Завдання:</u>

1. Назвіть дійсну і уявну частини комплексних чисел.

а) $5 + 6i$; б) $2i - 3$; в) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$; г) $\sqrt{3}\,i$.

2. Запишіть комплексні числа, у яких дійсна і уявна частини відповідно дорівнюють: а) 2 і 3; б) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{2}$; в) 0 і $\sqrt{2}$; г) - $\sqrt{3}$ і 0.

3. Знайдіть суму комплексних чисел:

а) $(3 + 5i) + (2 + 3i)$; б) $(5 – 3i) + (2 – 5i)$;

в) $(4 + 7i) + (2 – i)$; г) $(-2 + i) + (7- 3i)$.

4. Знайдіть різницю комплексних чисел:

а) $(3 + i) - (2 + 3i)$; б) $(2 – 3i) - (2 + i)$;

в) $(1 + 3i) - (-3 + i)$; г) $(-4 + 3i) - (4 - 3i)$.

5. Знайдіть добуток комплексних чисел:

а) $(2 + 3i)\cdot(3 + i)$; б) $(3 – 5i)\cdot(2 + i)$;

в) $(4 + i) \cdot (-5 + i)$; г) $(1 + i) \cdot (-1 + 2i)$.

6. Знайдіть частку комплексних чисел:

а) $\frac{1+i}{1-i}$; б) $\frac{2+i}{3-4i}$; в) $\frac{1+2i}{3-2i}$; г) $\frac{i}{i+1}$

7. Розв'яжіть рівняння.

а) $z^2 – 4z + 5 = 0$; б) $z^2 + 42z+ 13 = 0$;

в) $z^2 – 8z + 41 = 0$; г) $4z^2 + 4z + 5 = 0$.