Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера

План:

1. Системи лінійних рівнянь.
2. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера

Рівняння виду $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ (1) називається лінійним рівнянням з *n* невідомими: $x_1, x_2....x_n$. Слово лінійне означає, що рівняння 1-го степеня.

Розв'язком такого рівняння буде такий упорядкований набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, який перетворює наше рівняння в числову тотожність.

Рівняння виду (1) можна використати для побудови системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) називається системою ***m*** лінійних рівнянь з ***n*** невідомими.

Розв'язком системи (2) будемо називати такий набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, який задовольняє кожне рівняння системи (2). Це буде перетин множин розв'язків кожного рівняння даної системи.

- Якщо система має принаймні один розв'язок, то називається <u>сумісною.</u>
- Якщо ж система зовсім не має розв'язків, то називається <u>несумісною.</u>
- Якщо система має точно один розв'язок, то така називається <u>визначеною.</u>
- Якщо система має більше, ніж один розв'язок, то вона називається <u>невизначеною.</u>

- Якщо $\Delta \neq 0$, то система матиме єдиний розв'язок (1).
- Якщо $\Delta = 0$, то система або невизначена, або несумісна (система буде несумісною – не матиме жодного розв'язку, якщо хоча б один з $\Delta_k \neq 0$) .
- Якщо ж $\Delta = 0$ і $\Delta_k = 0$, то система матиме безліч розв'язків.

Крім того в системі (2) <u>всі вільні члени можуть бути рівні 0</u>. Тоді система називається <u>**однорідною.**</u>

Однорідна система завжди сумісна, тому що вона завжди має принаймні один розв'язок – нульовий $(0,0,0...0)$.

Нехай задана система n лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, ... x_n$, коефіцієнтами при яких є елементами матриці А, а вільними членами є числа $b_1, b_2, ..., b_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4)$$

Якщо визначник системи (4), тобто визначник, що складається з коефіцієнтів при невідомих

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (5)$$

,то система (4) має єдиний розв'язок.

Метод Крамера.

Позначимо через Δ_1 визначник, що утворюється з (5) після заміни його першого стовпчика стовпчиком вільних членів системи (4). аналогічно позначимо через Δ_2 визначник, що утворюється з (5) після заміни його другого стовпчика стовпчиком вільних членів системи (4), …, Δ_n- замінено останній стовпчик стовпчиком вільних членів.

Тоді розв'язок системи (4) записується у вигляді:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (6)$$

Система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Приклад 1. Розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими методом

Крамера: $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -4x + y = 8 \end{cases};$

Розв'язання: Обрахуємо основний визначник системи: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -10$

Замінимо перший стовпець стовпцем вільних коефіцієнтів: $\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 36$

Замінимо другий стовпець стовпцем вільних коефіцієнтів: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 64$

Підставимо результати в формули Крамера:

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{35}{-10} = -3.6$ $\qquad$ $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{64}{-10} = -6.4$

Відповідь: *(-3.6; -6.4).*

Приклад 2. Розв'язати системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

методом Крамера: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 2 + 6 + 9 - 4 + 8 = 45;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -48 + 6 - 8 - 12 - 12 - 16 = -90;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 4 - 24 + 9 + 16 + 16 = 45;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -24 + 8 + 9 + 36 + 4 + 12 = 45;$$

$x_1 = -\frac{90}{45} = -2;$ $\quad$ $x_2 = \frac{45}{45} = 1;$ $\quad$ $x_3 = \frac{45}{45} = 1;$ $\quad$ *Відповідь: (-2;1;1).*

Завдання для самостійного розв'язання:

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь ***(оберіть систему згідно порядкового номеру в списку групи):***

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3; \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 6; \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -10; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -10; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3; \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 15; \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 38; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3; \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -4; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5; \\ x_2 + 2x_3 = -1; \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x - 5y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

15. $$\begin{cases} 5x+7y+4z=3 \\ 3x-5y+2z=3 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} 7x+y-z=2 \\ 5x+2y+z=10 \\ 2x+3y-5z=2 \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} 3x+y+2z=6 \\ 2x-y+7z=7 \\ x+y-3z=-2 \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} 2x-3y+z=10 \\ x+y+4z=6 \\ x-y-2z=2 \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} 3x+2y-2z=1 \\ x+y+3z=6 \\ x-2y-7z=1 \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 7x+y-z=2 \\ 3x+2y-5z=1 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} 5x+3y-4z=8 \\ x-3y+5z=6 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 2x-5y-z=8 \\ x-y+3z=3 \\ 3x-4y-2z=7 \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 2x+y-3z=-1 \\ 3x+y-z=1 \\ 5x+2y+4z=0 \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} 3x+y+2z=2 \\ 2x+5y+4z=5 \\ 5x-y+2z=2 \end{cases}$$

Біографічна довідка:

Габріель Крамер *(31 липня 1704, Швейцарія — 4 січня 1752, Франція) — швейцарський математик, учень і друг Йоганна Бернуллі, один з творців лінійної алгебри.*

Крамер народився в сім'ї франкомовного лікаря. З раннього віку показав великі здібності до математики. У 18 років захистив дисертацію. У 20-річному віці Крамер виставив свою кандидатуру на вакантну посаду викладача на кафедрі філософії Женевського університету, де працює паралельно подорожуючи Європою.

Крамер розглянув систему довільної кількості лінійних рівнянь з квадратною матрицею. Рішення системи він представив у вигляді стовпця дробів із спільним знаменником — визначником матриці. Терміна «визначник» *(детермінант) тоді ще не існувало (його ввів Гаус в 1801), але Крамер дав точний алгоритм його обчислення.*

Методи Крамера відразу ж отримали подальший розвиток у працях Безу, Вандермонда та Келі, які й завершили створення основ лінійної алгебри. Теорія визначників швидко знайшла безліч застосувань в астрономії і механіці (<u>вікове рівняння</u>), при рішенні алгебраїчних систем, дослідженні форм тощо.