Елементи теорії матриць

План

1. ***Основні поняття.***
2. ***Дії з матрицями.***

1. Основні поняття

Розглянемо ще один математичний об'єкт, пов'язаний із системою рівнянь (1.1).

Означення. *Матрицею* називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців. Якщо повернутися до системи рівнянь (1.1), то коефіцієнти при невідомих у лівій частині якраз і утворюють таку прямокутну таблицю:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, а запис $m\times n$ означає її *розмір*. Зауважимо, що на першому місці в цьому запису зазначено кількість рядків матриці, а на другому — кількість стовпців. Наприклад, запис розміру матриці 5×3 означає, що в ній п'ять рядків і три стовпці. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається *квадратною*.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Елементи з двома однаковими індексами a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... a_{nn} утворюють *головну діагональ* матриці. Якщо $a_{ij}=a_{ji}$, то матриця називається *симетричною*.

Квадратна матриця, в якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називається *одиничною матрицею*:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця *називається трикутною.*

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність визначник, який складається з тих самих елементів.

$$\Delta(A)=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матриця називається *неособливою*, або *невиродженою*. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця *особлива*, або *вироджена*.

2. Дії з матрицями

1. *Сумою матриць одного й того самого порядку* $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ називається матриця $C=A+B$; $C=(c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць *A і B*: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Наприклад обидві матриці $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ мають розмір 3×4, тому за означенням можна утворити їх суму — матрицю

$$C=\begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

A+(–1)B=A–B – різниця двох матриць

A+(–1)A=0 – нульова матриця

Матриця (–1)A називається *протилежною* до матриці A і позначається –A.

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця *C*, кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці *A* на α, $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Приклад. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha=-2$; $C=\alpha A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності:

1) $A+B=B+A$;

2) $\alpha A=A\alpha$;

3) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

4) $(\alpha+\beta)A= \ =\alpha A+\beta A$,

5) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ **розміру** $m \times p$ **на матрицю** $B=(b_{ij})$ **розміру** $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, $C=(c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$.

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m \times n$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB \neq BA$.

Квадратна матриця A^2 це результат множення цієї матриці самої на себе.

Якщо в матриці поміняти місцями рядки і стовпці, то дістанемо матрицю, яку називають транспонованою до матриці А.

Приклад 1. Для даних матриць знайти матриці $A+B$, A^T, C^2, AB, BA.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв’язання:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C^2 = CC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 - 1(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1 & 1(-1) + 2\cdot 0 - 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0(-1) & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 2(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 3 \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3(-1) & -1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1 & -1(-1) + 1\cdot 0 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2&2&-1\\1&0&3\\4&13&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\3&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-3&2-2-2&0+4-4\\2+0+9&1+0+6&0+0+12\\8-3+6&4+3+4&0-6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\11&7&12\\11&11&2\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\1&0&3\\4&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1+0&4+0+0&-2+3+0\\2-1+8&2+0-6&-1-3+4\\8-3+16&6+0-12&-3+6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&1\\9&-4&0\\24&-6&11\end{pmatrix}.$$

Властивості множення матриць:

1. Множення матриць не комутативне: $AB \neq BA$
2. Множення матриць асоціативне: $(AB)C = A(BC)$
3. Множення матриць пов'язане з додаванням дистрибутивним законом: $A(B+C)=AB+AC$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Повернемось до системи рівнянь (1.1) і утворимо матриці: A — коефіцієнтів при невідомих, X — невідомих, B — вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&&&\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з означенням добутку матриць систему рівнянь (1.1) можна записати в матричному вигляді: $AX = B$, (1.5)

який значно скорочує запис системи рівнянь.

Означення. Матриця A^{-1} називається ***оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці*** A, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Завдання:

1. Знайти матрицю *A+B, A-B, B-A, 2A,* $2A-B$, A^T,

якщо $A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&0&5\\-4&2&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-1&2&2\\4&6&3\end{pmatrix}$.

2. Знайти добуток матриць

а) $\begin{pmatrix}1&3\\-6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\4&2\end{pmatrix}$

Додаткові приклади:

$$\begin{pmatrix}3&2&-5\\7&6&1\\2&3&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4&2\\2&-3&3\\5&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+1&2+4&-5+2\\7+2&6-3&1+3\\2+5&3-2&8-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&-3\\9&3&4\\7&1&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&-5\\7&6&1\\2&3&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&4&2\\2&-3&3\\5&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1&2-4&-5-2\\7-2&6-(-3)&1-3\\2-5&3-(-2)&8-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-7\\5&9&-2\\-3&5&9\end{pmatrix}.$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\3&2\end{pmatrix},$$

$$B^T=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\\6&7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2&4&6\\1&3&7\end{pmatrix}.$$

Множення (добуток) двох матриць $A_{i\times j}, B_{m\times n}$ знаходять за правилом, яке можна застосувати лише до матриць в яких кількості стовпців першої та рядків другої матриці співпадають $j=m$. В результаті отримують матрицю $C_{i\times n}$, розмірності кількості рядків першої на стовпців другої з елементами C_{kl}, які рівні сумі попарних добутків елементів k-го рядка першої матриці, на елемент l-го стовпця другої матриці.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&3&-2\\2&4&2\end{pmatrix}.$$

Елементи рядків першої і стовпців другої позначимо в різні кольори для того, щоб Вам наочніше продемонструвати правило множення матриць. Умова рівності кількості стовпців першої матриці = кількості рядків другої виконується ($3=3$).

Виконуємо обчислення елементів добутку матриць

$C_{1,1}=1\cdot3+2\cdot1+3\cdot2=3+2+6=11;$

$C_{1,2}=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4=2+6+12=18;$

$C_{1,3}=1\cdot1+2\cdot(-2)+3\cdot2=1-4+6=3;$

$C_{2,1}=2\cdot3+(-1)\cdot1+2\cdot2=6-1+4=9;$

$C_{2,2}=2\cdot2+(-1)\cdot3+2\cdot4=4-3+8=9;$

$C_{2,3}=2\cdot1+(-1)\cdot(-2)+2\cdot2=2+2+4=8.$

Записуючи матрицю в табличному вигляді

$$A_{2\times3}=\begin{pmatrix}11&18&3\\9&9&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 4 \\ (-2)\cdot 3+1\cdot 4 \\ 3\cdot 3+0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Знайти добуток матриць.

1) (1.110) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

Для знаходження добутку перемножуємо рядки першої матриці на стовпці другої

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2+5\cdot(-3) & 3\cdot 1+5\cdot 2 \\ 6\cdot 2-1\cdot(-3) & 6\cdot 1-1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}.$$

На цьому і побудована операція множення, необхідно почленно перемножити елементи рядка першої матриці на елементи стовпця другої матриці та просумувати. Звідси випливають і властивості добутку матриць, і обмеження на матриці (які можна перемножити, а які ні).

2) (1.112) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

За формулою множення знайдемо елементи нової матриці

$$A_{1,1} = 5\cdot 3+8\cdot 4-4\cdot 9 = 15+32-36 = 11;$$

$$A_{1,2} = 5\cdot 2+8\cdot(-1)-4\cdot 9 = 10-8-24 = -22;$$

$$A_{1,3} = 5\cdot 5+8\cdot 3-4\cdot 5 = 25+24-20 = 29;$$

$$A_{2,1} = 6\cdot 3+9\cdot 4-5\cdot 9 = 18+36-45 = 9;$$

$$A_{2,2} = 6\cdot 2+9\cdot(-1)-5\cdot 6 = 12-9-30 = -27;$$

$$A_{2,3} = 6\cdot 5+9\cdot 3-5\cdot 5 = 30+27-25 = 32;$$

$$A_{3,1} = 4\cdot 3+7\cdot 4-3\cdot 9 = 12+28-27 = 13;$$

$$A_{3,2} = 4\cdot 2+7\cdot(-1)-3\cdot 6 = 8-7-18 = -17;$$

$$A_{3,3} = 4\cdot 5+7\cdot 3-3\cdot 5 = 20+21-15 = 26.$$

Записуємо отримані значення в матрицю. $A = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}.$

3) (1.114) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$

За правилами добутком буде матриця-вектор розмірності 3×1. Обчислимо її елементи

$$A_{1,1} = 5\cdot6+0\cdot(-2)+2\cdot7+3\cdot4 = 30+14+12 = 56;$$

$$A_{2,1} = 4\cdot6+1\cdot(-2)+5\cdot7+3\cdot4 = 24-2+35+12 = 69;$$

$$A_{3,1} = 3\cdot6+1\cdot(-2)-1\cdot7+2\cdot4 = 18-2-7+8 = 17.$$

Остаточно матриця набуде вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Хоча це більше усім нагадує вектор, проте це матриця одиничної розмірності.

4) (1.115) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

При обчисленні добутку матриць-векторів отримаємо квадратну матрицю розміру 5×5.

$$A = \begin{pmatrix} 3\cdot4 & 3\cdot0 & 3\cdot(-2) & 3\cdot3 & 3\cdot1 \\ 1\cdot4 & 1\cdot0 & 1\cdot(-2) & 1\cdot3 & 1\cdot1 \\ -1\cdot4 & -1\cdot0 & -1\cdot(-2) & -1\cdot3 & -1\cdot1 \\ 5\cdot4 & 5\cdot0 & 5\cdot(-2) & 5\cdot3 & 5\cdot1 \\ 2\cdot4 & 2\cdot0 & 2\cdot(-2) & 2\cdot3 & 2\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

При цьому операцій мінімум, а отримана нова квадратна матриця має п'ятий порядок.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5) (1.116)

Результатом множення в даному прикладі буде матриця, яка містить лише один елемент.

$$A_{1,1} = 5\cdot3+0\cdot1-2\cdot(-1)+3\cdot5+1\cdot2 =$$

$$= 15+0+2+15+2 = 34.$$

А все тому, що перша матриця має 1 рядок, а друга - один стовпець!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot4+(-5)\cdot3 & 2\cdot0+1\cdot1+(-5)\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot(-2)+(-5)\cdot0 \\ 3\cdot1+(-4)\cdot4+2\cdot3 & 3\cdot0+(-4)\cdot1+2\cdot1 & 3\cdot3+(-4)\cdot(-2)+2\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & -4 & 4 \\ -7 & -2 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8 \\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot2+1\cdot4+1\cdot5 & 3\cdot3+1\cdot2+1\cdot3 \\ 2\cdot2+1\cdot4+2\cdot5 & 2\cdot3+1\cdot2+2\cdot3 \\ 1\cdot2+2\cdot4+3\cdot5 & 1\cdot3+2\cdot2+3\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 18 & 14 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць має дві особливості. При множенні матриць комутативний (переставний) закон може і не виконуватися, тобто $A\cdot B$ не завжди дорівнює $B\cdot A$.

Наприклад, знайдемо добуток матриць B і A із прикладу 1:

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot1+6\cdot3 & 5\cdot2+6\cdot4 \\ 7\cdot1+8\cdot3 & 7\cdot2+8\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+2\cdot(-1) & 2\cdot1+2\cdot(-1) \\ 2\cdot1+2\cdot(-1) & 2\cdot1+2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot1+a_{12}\cdot0 & a_{11}\cdot0+a_{12}\cdot1 \\ a_{21}\cdot1+a_{22}\cdot0 & a_{21}\cdot0+a_{22}\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно $EA = A$.