Лекція 1. Елементи теорії матриць і визначників

План лекції:

1. Визначники 2-го та 3-го, n-го порядку. Властивості визначників.
2. Мінори та алгебраїчні доповнення.
3. Правило знаходження визначника довільного порядку (теорема Лапласа).
4. Матриці, дії з ними.
5. Ранг матриці. Елементарні перетворення матриць.
6. Обернена матриця, її обчислення.

---

1. Визначники 2-го та 3-го порядку, їх властивості.

Визначником другого порядку називається число, записане у вигляді таблиці, яке дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – елементи визначника, при цьому елементи a_{11}, a_{22} утворюють головну діагональ визначника, а елементи a_{12} і a_{21} – побічну.

Отже, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей.

Приклад 1.

Обчислити визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = -2 - 12 = -14$$

.

Приклад 2.

Обчислити визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 5 = -4 - 20 = -24$$

.

Визначник третього порядку – це число, одержане так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \, a_{13} \\ a_{21} \, a_{22} \, a_{23} \\ a_{31} \, a_{32} \, a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} -$$

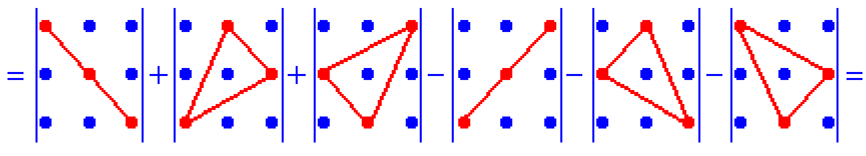
$$a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Символи a_{ij} називаються *елементами визн*ачника, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють головну діагональ визначника 3-го порядку, а елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} – побічну діагональ.

Існує правило, яке називають ***правилом трикутника***, яке дозволяє легко обчислити визначник 3-го порядку:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Приклад: Знайти визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Застосовуємо правило трикутника для знаходження визначника

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&5&-3\\1&4&-2\\-7&3&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&5&-3\\1&4&-2\\-7&3&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&5&-3\\1&4&-2\\-7&3&0\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}2&5&-3\\1&4&-2\\-7&3&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&5&-3\\1&4&-2\\-7&3&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&5&-3\\1&4&-2\\-7&3&0\end{vmatrix}=$$

$$=0+70-9-84+0+12=-11.$$

Визначник рівний 11.

Отже, для обчислення визначника 3-го порядку за правилом трикутника, із знаком плюс беремо добуток елементів, що стоять на головній діагоналі, а також добутки елементів, які лежать на паралелях до цієї діагоналі з третім множником, що стоїть у протилежному куті таблиці; а з знаком мінус добуток елементів, що лежать на побічній діагоналі, а також добутки елементів, що стоять на паралелях до цієї діагоналі з третім множником, який стоїть у протилежному куті таблиці.

Отже***, визначник*** – алгебраїчна сума всіх можливих добутків його елементів, взятих по одному з кожного рядка і з кожного стовпця з відповідним знаком.

Приклад 1.

Обчислити визначник третього порядку $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3\\3&0&1\\4&2&-3\end{vmatrix}$.

Розв’язання:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3\\3&0&1\\4&2&-3\end{vmatrix}=1\cdot0\cdot(-3)+2\cdot1\cdot4+3\cdot2\cdot\left(-3\right)-(-3)\cdot0\cdot4-1\cdot1\cdot2-2\cdot3\cdot(-3)=$$

$$=0+8-18+0-2+18=6.$$

Приклад 2.

Обчислити визначник третього порядку $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&-3\\3&1&-2\\2&2&-3\end{vmatrix}$.

Розв’язання:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-3)+1\cdot(-2)\cdot2+3\cdot2\cdot\left(-3\right)-(-3)\cdot1\cdot2-(-3)\cdot3\cdot1-2\cdot(-2)\cdot1=$$

$$=-3-4-18+6+9+4=-6.$$

Другий варіант обчислення визначника 3 порядку

Правило Саррюса, або **схема Саррюса** — практичний спосіб обчислення визначника квадратної матриці порядку 3, названий на честь французького математика П'єра Саррюса.

Для обчислення визначника до нього з правої сторони дописуються перші два стовпці, і добутки елементів вздовж головної діагоналі додаються після чого віднімаються добутки елементів вздовж побічної діагоналі. Результати добутків точно такі ж ,як і отриманні при форманні за правилом трикутників.

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc|cc}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2}\end{array}\right.-\left|\begin{array}{ccc|cc}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2}\end{array}\right.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 6\\ -1 & -2 & -3\end{vmatrix}+\left|\begin{array}{ccc|cc}5 & 3 & 1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4\\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2\end{array}\right.+\left|\begin{array}{ccc|cc}5 & 3 & 1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4\\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2\end{array}\right.-$$

$$-\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 6\\ -1 & -2 & -3\end{vmatrix}-\left|\begin{array}{ccc|cc}5 & 3 & 1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4\\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2\end{array}\right.-\left|\begin{array}{ccc|cc}5 & 3 & 1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4\\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2\end{array}\right.=$$

$$=-60-18-4-\left(-4\right)-\left(-60\right)-\left(-18\right)=0.$$

Розглянемо (на прикладі визначників третього порядку) основні ***властивості визначників***:

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями і навпаки.
2. Від перестановки двох рядків або двох стовпців визначник змінює лише знак.
3. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) дорівнюють нулеві, то визначник дорівнює нулю.
4. Спільний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.
5. Визначник, у якого елементи будь-яких двох рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.

6. Визначник, у якого елементи будь-яких двох рядків (стовпців) однакові, дорівнює нулю.
7. Якщо кожний елемент якого-небудь рядка (стовпця) визначника є сума двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників. У одного з них елементами відповідного рядка (стовпця) будуть перші доданки, а у другого – другі. Всі інші елементи у цих двох визначників ті, що і в даного.
8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж число.

Визначником n ***- го порядку*** називається число, записане у вигляді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

де i - номер рядка, а j - номер стовпця.

Отже, визначником n - го порядку називається число, рівне алгебраїчній сумі n членів, кожен з яких є добуток його n елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного з n рядків і кожного з n стовпців квадратної таблиці чисел, причому половина визначених членів береться з їх знаками, а інші – з протилежними.

2. Мінори та алгебраїчні доповнення.

Введемо ще два поняття, які будуть потрібні нам для обчислення визначників будь-якого порядку.

Розглянемо визначник n-го порядку.

Мінором M_{ij} будь-якого елемента a_{ij} визначника n-го називається визначник (n-1) порядку, одержаний з даного визначника викреслюванням і-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких міститься даний елемент.

Мінор елемента a_{ij} позначимо M_{ij}.

Приклад 3. Обчислити мінор M_{12} визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Мінор M_{12} елемента визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ дорівнює: $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} будь-якого елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.}$$

Введені поняття мінору та алгебраїчного доповнення дають можливість одержати ще один метод обчислення визначників третього порядку, який узагальнюється на визначники будь-якого порядку.

3. *Правило знаходження визначника довільного порядку.*

Теорема Лапласа*:* визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

Дана формула називається *розкладом визначника* за елементами і-го рядка.

Наслідок 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Приклад 4. Обчислити визначник IV порядку, користуючись властивостями визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

До елементів третього стовпця додаємо елементи другого стовпця, помножені на два, а до елементів другого стовпця - елементи першого стовпця, одержимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо одержаний визначник за елементами першого рядка; оскільки три елементи 1 рядка дорівнюють нулю, то обчислення визначника IV порядку зводиться до обчислення тільки одного визначника III порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-8) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -32 \cdot (10 - 1) = -288.$$