Вища математика

Навчальний посібник

Басманов Олексій Євгенович
Кириченко Ігор Костянтинович
Мігунова Лариса Василівна
Сознік Олександр Петрович

Зміст

ВСТУП

У курсі “Вища математика” розглянуто деякі розділи широкої і багатогранної за змістом науки – математики. Ці розділи традиційно мають назву “вища математика” на відміну від елементарної математики, яка вивчається у школі. Звідси зовсім не випливає, що математика, яка вивчалася у школі, є нижчою. Поняття елементарної математики є дуже розтягнутим. Тому такий розподіл є цілком умовним, він виникнув в результаті того, що ряд розділів вивчається у шкільному курсі, а ряд – у вищій школі.

Що таке математика у широкому сенсі цього слова? Якщо казати коротко, то математика – це мова, хоча і специфічна, яка необхідна для отримання в остаточному підсумку числа. Саме число і дає опис навколишньому світу й усіх явищ, які в ньому виникають. А оскільки математика є мовою, то необхідно вчитися застосовувати цю мову, тому що культурний рівень сучасної людини, тим більше офіцера, визначається кількістю мов, якими вона володіє.

Мова математики за суттю проста. Вона використовує літери латинського і грецького алфавітів, а також ряд спеціальних математичних символів (кількість яких, взагалі кажучи, велика). Хоча назви цих символів у різних мовах народів Землі звучать по різному, проте їх значення і зміст є загально прийнятними. З цих символів, використовуючи далі цілком певні і строгі правила, на підставі ряду аксіом і теорем будується послідовна і логічна споруда математики. Варто підкреслити, що мовою математики користується багато інших наук. За німецьким філософом І. Кантом “у кожному знанні стільки істини, скільки математики”.

Математика виникла у результаті практичної діяльності людини як відбиття дійсних відношень серед реальних об’єктів і як необхідна мова й апарат для подальшого розвитку природознавства і техніки.

Сучасна армія, в широкому сенсі цього слова, а тим більше армія майбутнього, неуявна без техніки. Найновіші наукові і технічні розробки швидко знаходять застосування в озброєнні, бойовому і технічному забезпеченні військових і, зокрема, пожежно-технічних підрозділів. Зрозуміло, що науковий і технічний розвиток неможливий без застосування того апарата, який надає математика. Природно також, що без знання математики неможливо використовувати й якісно обслуговувати весь сучасний парк пожежно-бойової техніки, на високому фаховому рівні виконувати свої обов’язки, забезпечуючи таким чином пожежну безпеку і нормальну життєдіяльність українського народу.

Отже в цьому курсі “Вищої математики” розглядаються такі розділи: елементи вищої алгебри, елементи лінійної й векторної алгебри, основи аналітичної геометрії, основи математичного аналізу (диференціальне й інтегральне числення), звичайні диференціальні рівняння.

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1.1 Визначники другого і третього порядку

Визначником (або детермінантом) другого порядку називається число, що позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і знаходиться як

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.1)$$

Числа a_{ij} називаються елементами визначника. Правило (1.1) обчислення визначника другого порядку можна пояснити такою схемою (рис. 1.1):

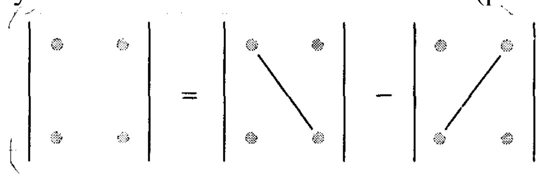

Рис. 1.1 – Схема знаходження визначника другого порядку

Приклад. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6 - 2\cdot 5 = 6 - 10 = 4$.

Визначником третього порядку називається число, що позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ і знаходиться як

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1.2)$$

Цю формулу легко запам’ятати за допомогою мнемонічного правила – *правила трикутника* (рис. 1.2).

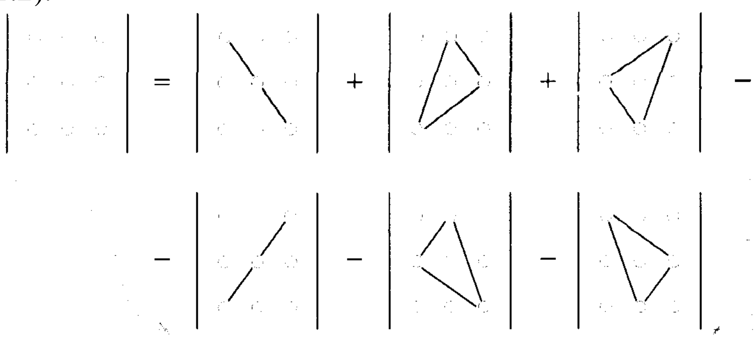

Рис. 1.2 – Схема знаходження визначника третього порядку

Мінором елемента a_{ij} визначника третього порядку називається визначник другого порядку M_{ij}, який можна отримати із даного шляхом викреслювання рядка i та стовпчика j.

Приклад. Для визначника третього порядку мінор елемента a_{13} дорівнює $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника третього порядку називається число $A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} M_{ij}$.

Аналогічно вводяться поняття мінору та алгебраїчного доповнення для визначників другого порядку.

Розглянемо тепер основні властивості визначників.

1. Визначник не змінюється, якщо всі його рядки замінити на стовпчики із відповідними номерами.
2. Якщо існує стовпчик або рядок визначника, який повністю заповнений нулями, то визначник дорівнює нулю.
3. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки або стовпчики, то знак визначника зміниться на протилежний.
4. Якщо у визначнику є два однакових рядки або два однакових стовпчики, то визначник дорівнює нулю.
5. Якщо елементи деякого рядка або стовпчика мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

6. Якщо до елементів деякого рядка (або стовпчика) додати елементи іншого рядка (стовпчика), то визначник не зміниться.
7. <u>Теорема розвинення</u>. Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (або стовпчика) на їх алгебраїчне доповнення.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij} \;. \qquad (1.3)$$

Використовуючи теорему розвинення, ми переходимо до визначників на один порядок менше ніж даний.

Приклад. Обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо його, використовуючи теорему розвинення (1.3):

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$$

$$4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 4(-10+56) - 3(15+35) + (-24+10) = 92$$

За аналогією до визначників другого і третього порядку вводяться визначники вищих порядків (четвертого, п'ятого тощо). Наприклад, визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

буде визначником четвертого порядку. Його значення знаходиться за допомогою теореми розвинення:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Таким чином, знаходження визначника четвертого порядку зводиться до знаходження чотирьох визначників третього порядку.

Всі властивості визначників 1-7, викладені вище, мають місце для визначників довільного порядку.

1.2 Матриці, дії над матрицями

Матрицею розмірів $m \times n$ називається таблиця деяких об'єктів, яка має m рядків і n стовпчиків.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриці, як правило, позначають латинськими літерами, наприклад, A, B, C, D і т.д. Зазначимо, що матриці було введено англійським математиком А. Келі (1821-1895).

Горизонтальні ряди називаються *рядками* матриці, а вертикальні стовпці – *стовпчиками* матриці. Якщо матриця містить лише один рядок, то її називають ***матрицею-рядком***, якщо один стовпчик, то – ***матрицею-стовпчиком***. Якщо у матриці кількість рядків співпадає із кількістю стовпчиків, то її називають ***квадратною***. В протилежному випадку – ***прямокутною***.

Символи a_{ij}, які входять у матрицю, називаються її ***елементами***. Перший індекс вказує номер рядка, другий – номер стовпця. Таким чином, елемент a_{ij}, знаходиться на перетині i-го рядка і j-го стовпця. У загальному випадку елементами матриці можуть бути будь-які математичні об'єкти: дійсні та комплексні числа, вектори, функції тощо. Будемо вивчати, головним чином, матриці, елементами яких є дійсні числа. Слід зазначити, що матрицю, яка має один рядок і один стовпець, тобто матрицю (a) ототожнюють із самим її елементом a. З метою скороченого запису для матриць використовується позначення $A = (a_{ij})_{mn}$, або $\|a_{ij}\|_{mn}$, де $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Кількість рядків m та стовпців n у матриці може бути довільною, причому число рядків може бути і менше, і дорівнювати, і більше від числа стовпців. Числа m і n визначають розмір матриці. Якщо матриця має m рядків та n стовпців, то кажуть, що її розміри $m \cdot n$.

Якщо $m = n$, то матриця є *квадратною*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а число n називають її ***порядком***. Елементи a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} утворюють *головну* *діагональ* квадратної матриці.

Сума елементів матриці, які знаходяться на головній діагоналі, називається *слідом* матриці й позначається $spurA$, SpA, або trA (від англійських spur, trace).

Квадратна матриця, в якій відмінні від нуля тільки елементи, що розташовані на головній діагоналі, називається ***діагональною***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

так званий *символ Кронекера* (німецький математик, 1823-1891), то в розгорнутій формі діагональна матриця матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

При цьому для діагональної матриці застосовується інколи й таке позначення $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Діагональна матриця, в якій всі елементи головної діагоналі – одиниці, називається о*диничною* та позначається E або I:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Інколи, щоб вказати число рядків і стовпчиків у відповідних одиничних матрицях, їх позначають символами E_n або E_{nn}. Як видно, в одиничній матриці $a_{ij} = \delta_{ij}$, тобто $E = diag(1, 1, \dots, 1)$, а $spurE$ дорівнює порядку матриці n. Одинична матриця відіграє в матричній алгебрі таку саме роль, як звичайна одиниця в елементарній алгебрі.

Нульовою матрицею називають матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Така матриця позначається як 0 і має таку ж роль, як нуль в елементарній алгебрі.

З кожною квадратною матрицею пов'язаний визначник. Визначник матриці позначають $\det A$.

Приклад. Знайти визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = 6 - (-72) = 78$$

Дії над матрицями

Сумою двох матриць $A=(a_{ij})_{mn}$ і $B=(b_{ij})_{mn}$ одного й того самого розміру $m\cdot n$ називається матриця $C=(c_{ij})_{mn}$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних доданків елементів матриць, тобто:

$$\left(c_{ij}\right)_{mn}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{mn}.$$

Або ж у матричній формі:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Те ж саме вірно і для різниці матриць. З означення суми випливають властивості цієї операції:

1. Комутативність: $A+B=B+A$.
2. Асоціативність: $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. $A+0=0+A=A$, де 0 – нульова матриця.

Добутком матриці A на число k називається матриця:

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Властивості добутку матриці на число:

1. $kA=Ak$ (комутативність),
2. $l(kA)=(lk)A=k(lA)$ (асоціативність відносно множення на число),
3. $k(A+B)=(kA)+(kB)$ (дистрибутивність відносно множення на число),
4. $(k+l)A=(kA)+(lA)$ (дистрибутивність відносно матриці),

де k і l – числа, A і B – матриці.

Добутком матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{mk}$ та матриці $B=\left(b_{ij}\right)_{kn}$ називається матриця $C=\left(c_{ij}\right)_{mn}$, елементи якої дорівнюють

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{k}a_{ik}b_{kj}. \qquad (1.4)$$

З означення випливає, *що добуток двох матриць існує тільки тоді, коли кількість стовпчиків матриці A, що є першим множником, дорівнює кількості рядків матриці B, що є другим множником.*

Будь-який елемент c_{ij}, згідно з (1.4), дорівнює сумі попарних добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B. *Матриця-добуток* має стільки рядків, скільки їх у першого множника, і стільки стовпців, скільки їх у другого множника. На відміну від звичайних чисел, в загальному випадку добуток двох матриць не задовольняє комутативному закону:

$$AB \neq BA$$

Дійсно, по-перше, може трапитися, що добуток AB існує, а добуток BA обчислити неможливо (кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, а кількість стовпчиків матриці B та рядків матриці A не будуть рівними), або навпаки, і по-друге, якщо навіть існують обидва ці добутки, то в загальному випадку вони можуть не дорівнювати один одному.

Через некомутативність добутку матриць потрібно ретельно стежити за порядком множників. У зв'язку з цим існують терміни: "помножимо A справа на B", що означає добуток AB і, навпаки, "помножимо A зліва на B", що означає добуток BA.

У будь-якому випадку, якщо A і B квадратні матриці одного порядку, їх завжди можна перемножити одна на одну, тобто добутки AB і BA для квадратних матриць існують будь-коли, але їхній результат буде залежати від порядку співмножників. У тих випадках, коли $AB = BA$, матриці A і B називають *комутативними* або *переставними.*

У загальному випадку операція множення матриць не задовольняє комутативний закон, але два останніх закони алгебри – асоціативний та дистрибутивний, залишаються в силі й при множенні матриць, тобто основні властивості операції множення мають вигляд:

1. $EA = AE = A$ (комутативність, якщо добутки A – квадратна матриця),
2. $(\lambda A)B = \lambda(AB)$ (асоціативність відносно числа),
3. $(A+B)C = (AC)+(BC)$ (дистрибутивність),
4. $C(A+B) = CA + CA$ (дистрибутивність),
5. $(AB)C = A(BC)$ (асоціативність відносно матриці).

Всі ці властивості безпосередньо випливають із означення суми та добутку матриць

Приклад 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 21 \\ 27 & 34 & 47 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.

Розглянемо добутки AB та BA двох ненульових квадратних матриць:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Їх добуток

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Легко переконатися, що A і B не комутують і добуток BA не дорівнює нулю:

$$BA = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Відзначимо, що на відміну від звичайних чисел, добуток двох ненульових матриць може дорівнювати нулю, як в цьому прикладі.

Транспонованою матрицею називається матриця, яку можна отримати із даної шляхом заміни рядків на стовпчики, а стовпчиків на рядки. Інакше кажучи, ця операція міняє місцями рядки і стовпці матриці:

$$\left(a_{ij}\right)_{mn}^{T} = \left(a_{ji}\right)_{nm}.$$

1.3 Обернена матриця

Оберненою матрицею до матриці A називається матриця A^{-1} така, що їх добуток дорівнює одиничній матриці $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Обернена матриця існує лише для квадратних матриць, визначник яких відрізняється від нуля: $\det A \neq 0$.

<u>Теорема</u>. Оберненою до матриці $A = \|a_{ij}\|$ є матриця $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\|A_{ij}\|^T$. Ця матриця будується із алгебраїчних доповнень A_{ij} елементів матриці A, транспонується і ділиться визначник матриці A.

Приклад. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти обернену матрицю.

Знаходимо алгебраїчні доповнення A_{ij} до кожного з елементів a_{ij} матриці A:

$a_{11} = 1$, $\quad A_{11} = (-1)^{1+1} 4 = 4$;

$a_{12} = 2$, $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} 3 = -3$;

$a_{21} = 3$, $\quad A_{21} = (-1)^{2+1} 2 = -2$;

$a_{22} = 4$, $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} 1 = 1$.

Запишемо матрицю $\tilde{A}$, в якій замість елементів матриці A, записані їх алгебраїчні доповнення:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо цю матрицю:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер знаходимо визначник матриці A:

$$\det A = 4 - 6 = -2$$

і записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що добуток матриці A на A^{-1} дійсно дорівнює одиничній матриці

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

1.4 Системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \qquad (1.5)$$

де n необов'язково збігається з m.

Розв'язком системи (1.5) називається сукупність n чисел c_1, c_2, ..., c_n яка після підстановки замість невідомих x_1, x_2, ..., x_n перетворює систему рівнянь у систему арифметичних тотожностей.

Система (1.5) називається ***сумісною,*** якщо існує хоча б один розв'язок, і несумісною у протилежному випадку, тобто коли розв'язків не існує.

Система називається ***визначеною,*** якщо вона має один розв'язок і ***невизначеною***, якщо вона має нескінченну кількість розв'язків.

Система називається ***однорідною***, якщо $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Очевидно така система завжди сумісна, оскільки сукупність 0, 0, ..., 0 є її розв'язком. Такий розв'язок називається *тривіальним.*

Поряд з розгорнутим (1.5) користуються й іншими записами систем лінійних рівнянь.

Дуже лаконічною й зручною є матрична форма запису:

$$AX = B, \tag{1.6}$$

де A – ***матриця системи***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а X, B – матриці-стовпці:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Дві системи рівнянь:

$$A_1 X = B_1 \text{ і } A_2 X = B_2$$

називаються *еквівалентними,* якщо вони мають однакові розв'язки й ніяких інших. Для позначення еквівалентності будемо використовувати запис:

$$A_1 X = B_1 \Leftrightarrow A_2 X = B_2.$$

Зрозуміло, що системи (1.5) і (1.6) еквівалентні.

Виникає питання: які перетворення вихідної системи (1.5) можна виконувати в процесі розв'язування? Очевидно, лише ті, що не порушують еквівалентності системи лінійних рівнянь. До них належать:

1. Множення рівняння на будь-яке число, що не дорівнює 0;
2. Додавання будь-якого рівняння системи до іншого;
3. Переставлення місцями рівнянь.

Таким чином можна зробити висновки:

Висновок 1. Додавання до будь-якого рівняння системи лінійної комбінації інших рівнянь не порушує його еквівалентність;

Висновок 2. Викреслювання рівняння, яке є лінійною комбінацією інших рівнянь, не порушує його еквівалентність.

У процесі розв'язування може з'явитися рівняння вигляду:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0 .$$

Таке рівняння теж може бути викреслене.

1.5 Методи розв'язування лінійних систем

Якщо в системі (1.5) покласти $m = n$, то така система лінійних рівнянь називається *квадратною*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 , \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 , \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n . \end{cases} \tag{1.7}$$

Розглянемо два методи розв'язування систем лінійних рівнянь, які можуть бути застосовані до квадратних систем.

Метод Крамера (швейцарський математик, 1704-1752).

Припустимо, що визначник матриці системи (1.7) не дорівнює нулю, тобто $\Delta \equiv \det A \neq 0$. Розглянемо визначник:

$$\Delta_k \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

який отримується з Δ заміною k-го стовпця A_k на стовпець B .

<u>Теорема 1. (теорема Крамера)</u>. Якщо визначник матриці системи (1.7) не дорівнює нулю, то вона сумісна і має єдиний розв'язок:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \; k = 1, 2, \ldots, n , \tag{1.9}$$

де $\Delta \equiv \det A \neq 0$.

<u>Доведення</u>. Запишемо систему (1.7) у матричній формі:

$$A \cdot X = B .$$

Після множення на A^{-1} зліва отримаємо:

$$A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A)X = X = A^{-1} \cdot B$$

або

$$X = A^{-1}B . \tag{1.10}$$

Перепишемо рівність (1.10) у розгорнутому вигляді:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n) ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n) .$$

Сума $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n = \sum_{i=1}^{n} A_{i1}b_i$ є, очевидно, розклад Δ_1 (1.8) за елементами 1-го стовпчика, тобто

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогічно дістанемо:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Теорема доведена.

Приклад 1.
Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 14.$$

Отже, згідно з (1.9) дістанемо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3, \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0, \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1. \end{cases}$$

Отже, дана система рівнянь розв'язана вірно.

Матричний метод.
Розглянемо квадратну систему (1.7) у матричній формі:

$$A \cdot X = B.$$

Якщо визначник матриці системи не дорівнює нулю, то існує обернена матриця A^{-1}. Згідно з (1.10) маємо:

$$X = A^{-1} \cdot B .$$

Ця формула дуже зручна при одночасному розв'язуванні кількох систем, які мають однакові матриці системи (A), але різні стовпці правих частин (B).

Приклад 2.

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь з попереднього прикладу матричним методом.

Систему перепишемо у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

або

$$A \cdot X = B ,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$,

і тоді

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

1.6 Ранг матриці та сумісність системи лінійних рівнянь

Рангом матриці A називається найвищий порядок мінору матриці A, що не дорівнює нулю.

Оскільки мінор – це визначник, то це означення формулюється ще й так: рангом матриці A називається найвищий порядок відмінного від нуля визначника, який можна побудувати з елементів даної матриці.

Ранг матриці – це число, і позначають його $rangA$ або $r(A)$. Очевидно, що $rangA \le \min(m, n)$.

Для того, щоб знайти ранг матриці, використовують метод, який заснований на так званих ***елементарних перетвореннях*** матриці. До них належать:

1) транспонування;

2) перестановка місцями двох будь-яких рядків або стовпців;

3) множення рядка або стовпця на будь-яке число, не рівне нулю;

4) додавання до рядка або стовпця будь-якого іншого рядка або стовпця, помноженого на певне число;

5) викреслювання рядка або стовпчика, який складається з нулів.

Теорема (без доведення). Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці.

Лінійною комбінацією рядків матриці називається сума:

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_mA_m = \sum_{i=1}^{m} a_iA_i \, ,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – числові коефіцієнти;

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ – рядки матриці.

Лінійна комбінація стовпців визначається аналогічно.

Рядки (стовпці) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ називаються ***лінійно незалежними***, якщо з тотожності

$$\sum_{i=1}^{m} a_iA_i = 0 \, , \qquad (1.11)$$

випливає, що $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$.

Якщо в рівності (1.11) хоча б один з $a_i \neq 0$, то рядки (стовпці) називаються ***лінійно залежними***.

Кількість лінійно незалежних рядків (або стовпчиків) дорівнює рангу матриці.

Формули Крамера і використання оберненої матриці дають можливість розв'язувати тільки квадратні системи.

При розв'язуванні систем рівнянь, у яких $m \neq n$, перш за все виникає питання про сумісність системи.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матриця системи (1.5).

Матриця, що складається із матриці системи та стовпчика вільних членів

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називається ***розширеною матрицею системи***. Нехай ранг матриці $r = rang\, A$, а ранг розширеної матриці $\bar{r} = rang\, \overline{A}$. Оскільки матриця $\overline{A}$ містить у собі всі стовпчики матриці A, r яких лінійно незалежні, то $\bar{r}$ не може бути меншим за r. Стовпчик B може бути лінійно залежним від стовпців матриці A, тоді $r = \bar{r}$, а якщо незалежним, тоді $\bar{r} = r + 1$.

Теорема Кронекера–Капеллі (А. Капеллі – італійський математик, 1858-1916). Для сумісності системи лінійних рівнянь необхідно й достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу розширеної матриці. Система є визначеною, якщо $\bar{r} = r = n$, і невизначеною, якщо $r = \bar{r} < n$.

Приклади.

1. Дослідити систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 5 \, , \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4 \, , \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3 \, , \\ -x_1 + x_2 - x_4 = -4 \, . \end{cases}$$

Обчислюємо ранг матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & -8 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

звідки $r=4$. Аналогічно дістаємо, що ранг розширеної матриці $r=4$, тобто система сумісна.

2. Дослідити систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 = 3\,, \\ 2x_1 + x_2 = 1\,, \\ 4x_1 + 7x_2 = -4\,. \end{cases}$$

У даній системі три рівняння і дві невідомі величини. А оскільки в системі з $n+1$ рівнянь відносно n невідомих розширена матриця $\overline{A}$ буде квадратною порядку $n+1$, то тоді, щоб наша система була сумісна, за теоремою Кронекера-Капеллі, визначник матриці $\overline{A}$ мусить дорівнювати нулю. Однак визначник

$$\det \overline{A} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 77 \neq 0\,,$$

тому наша система несумісна.

3. Дослідити систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\,, \\ x_1 + x_2 = 1\,. \end{cases}$$

Обчислюємо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Утім серед його мінорів є відмінний від нуля, наприклад:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\,,$$

тобто, ранг матриці A дорівнює двом. Серед визначників матриці

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

є визначник, відмінний від нуля, наприклад:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2,$$

тобто ранг розширеної матриці $\overline{A}$ дорівнює трьом.

Згідно з теоремою Кронекера-Капеллі дана система несумісна.

Насамкінець дослідимо довільну однорідну систему рівнянь

$$A\cdot X=0.$$

Вище відзначалося, що ця система завжди сумісна. Це безпосередньо випливає з теореми Кронекера-Капеллі, оскільки стовпець B нульовий і $r=\overline{r}$.

Якщо $r=\overline{r}=n$, то з теореми випливає також, що система визначена, тобто існує тільки тривіальний розв’язок.

Отже, нетривіальний розв’язок існує, якщо $r=\overline{r}<n$.

У тому випадку, коли система (2.11) квадратна, то, очевидно, для існування нетривіального розв’язку необхідно й достатньо, щоб $\det A=0$.

Приклад. Розв’язати систему:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\ x_1-x_2+x_3=0,\\ 2x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

Визначник матриці системи:

$$\det\overline{A}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Отже, існує лише тривіальний розв’язок.

1.7 Загальний розв’язок системи лінійних рівнянь

Теорема Кронекера-Капеллі лише встановлює сумісність або несумісність системи і не відповідає на запитання, як знайти розв’язок, якщо він існує.

Нехай система (1.5) сумісна, тобто $r=\overline{r}$.

Оскільки $rangA=r$, то у матриці A є r лінійно незалежних рядків. Всі інші $m-r$ є лінійні комбінації r базисних рядків. Те саме буде справедливо і стосовно $\overline{A}$.

Лінійна залежність $m-r$ рядків матриці A означає лінійну залежність $m-r$ рівнянь від r базисних рівнянь (рівнянь, що відповідають r базисним рядкам $\overline{A}$).

Припустимо, для зручності, що базисними є перші r рівнянь. Тоді можна відкинути решту $m-r$ рівнянь і дістати систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{1.12}$$

яка еквівалентна початковій системі.

Таким чином, для того щоб розв'язати початкову систему достатньо розв'язати систему, яка складається тільки з лінійно незалежних рівнянь.

Якщо система (1.12) квадратна, тобто $r = n$ то, очевидно, визначник матриці системи не дорівнює нулю (всі рядки лінійно незалежні) і єдиний розв'язок можна дістати, наприклад, за допомогою формул Крамера або оберненої матриці.

Розглянемо тепер випадок, коли $r = \bar{r} < n$, тобто система рівнянь невизначена.

Не зменшуючи загальності дослідження, будемо вважати, що базисним є мінор M_r (***базисним мінором*** називається мінор найбільшого порядку, що відрізняється від нуля), розташований у лівому верхньому куті, тобто базисними будуть перші r рядків і стовпців матриці $\overline{A}$.

У кожному рівнянні системи (1.12) залишаємо тільки перші r невідомих, а решту переносимо у праву частину:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_2 = b_1 + a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_2 = b_2 + a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_2 = b_r + a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{1.13}$$

Таким чином, ми дістали систему r лінійно незалежних рівнянь, у яких праві частини містять $n - r$ вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n.

Невідомі x_1, x_2, $\ldots$, x_r будемо називати ***базисними***, а невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n – ***вільними***.

Надаючи вільним невідомим x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n довільних числових значень c_{r+1}, c_{r+2}, $\ldots$, c_n, ми замість (1.13) дістанемо квадратну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = \tilde{b}_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = \tilde{b}_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = \tilde{b}_r, \end{cases} \tag{1.14}$$

де $\tilde{b}_i = b_i - a_{ir+1}c_{r+1} - \ldots - a_{in}c_n$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Система (1.14) має, очевидно, тільки один розв'язок, який можна дістати, наприклад, методом Крамера.

Отже, будь-якому довільному набору вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n відповідає єдиний розв'язок системи (1.14), тобто при $r = \bar{r} < n$ система рівнянь має нескінченну кількість розв'язків.

Кожний із цих розв'язків називатимемо ***частинним*** розв'язком.

Загальним розв'язком системи (1.7) називається розв'язок, у якому всі базисні невідомі виражаються через вільні.

Очевидно, що загальний розв'язок системи (1.5) можна одержати, розв'язавши еквівалентну їй систему (1.14).

Розв'язок системи (1.14):

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n \ , \\ x_2 = \beta_2 + a_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n \ , \\ \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ x_r = \beta_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n \end{cases} \tag{1.15}$$

є, таким чином, загальним розв'язком вихідної системи (1.5).

Зрозуміло, що за допомогою загального розв'язку можна дістати будь-який частинний розв'язок.

Частинний розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних змінних, називається ***базисним розв'язком***.

Приклади.

1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 5 \ , \\ -x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \ , \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 7 \ , \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 12 \ , \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2 \ . \end{cases}$$

Для скорочення запишемо початкову систему у вигляді матриці:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 5 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & 6 & -2 & 12 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -2 \end{array}\right),$$

де стовпчик B для зручності відокремлено рискою. Відзначимо, що це є не що інше як розширена матриця системи.

Обчислюємо $rang\overline{A}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 42 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 42 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -42 \end{array}\right).$$

Очевидно, що $rangA = rang\overline{A} = 3$, оскільки три останніх рядки (рівняння) пропорційні і два з них можна викреслити. Отже, дістанемо вивідну систему, яка еквівалентна початковій:

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 42 \end{pmatrix} \text{ або}$$

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ \quad - x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ \qquad 2x_3 + 4x_4 = 21. \end{cases}$$

Невідомі x_1, x_2, x_3 можна вибрати як базисні, оскільки:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Перенесемо вільну невідому x_4 у правий бік рівнянь і розв'язуючи утворену систему, дістаємо загальний розв'язок вихідної системи:

$$\begin{cases} x_1 = -9 + 4x_4, \\ x_2 = \dfrac{11}{2} - x_4, \\ x_3 = \dfrac{21}{2} - 2x_4 \end{cases} \text{ або } \; x_{баз} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 + 4x_4 \\ \dfrac{11}{2} - x_4 \\ \dfrac{21}{2} - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

При $x_4 = 0$ дістанемо базисний розв'язок: $x_1 = -9$, $x_2 = 11/2$, $x_3 = 21/2$, $x_4 = 0$ або:

$$x_{баз} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11/2 \\ 21/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що $x_{баз}$ є розв'язок вихідної системи.

Дійсно:

$$A \cdot x_{баз} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 & -1 \\ -1 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & -3 \\ 2 & -6 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 11/2 \\ 21/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = B.$$

1.8 Метод Гауса розв'язку системи лінійних рівнянь

Виведені вище формули розв'язування системи лінійних рівнянь мають дуже простий вигляд:

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ (метод Крамера),

$X = A^{-1} \cdot B$ (матричний метод),

але вони малопридатні для розв'язування систем з немалою кількістю невідомих. Наприклад, для розв'язування квадратної системи з 5 невідомими необхідно обчислити

6 визначників 5-го порядку, кожний з яких є сумою $5!$ доданків, а кожний доданок – добутком 5 множників. Тільки кількість необхідних операцій множення є

$$6 \cdot 5! \cdot 4 = 2880 .$$

Зрозуміло, що для ще більших n труднощі числових обчислень стають практично непереборними.

Як відомо, елементарні перетворення дають можливість дістати систему, яка еквівалентна початковій.

Нехай задано систему лінійних рівнянь (1.5):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 , \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 , \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m . \end{cases}$$

Для зручності припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Поділивши перше рівняння на a_{11}, дістанемо:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}} .$$

Помноживши це рівняння на a_{21} і віднімаючи від другого рівняння, дістанемо

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} \right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} \right) x_3 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} a_{21} \right) x_n = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{21}$$

або скорочено

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 .$$

Після аналогічних перетворень решти рівнянь дістанемо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \dots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 , \\ & & a'_{22}x_2 & + & \dots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 , \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a'_{m2}x_2 & + & \dots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m . \end{cases}$$

Таким чином, ми виключили невідому x_1 з усіх рівнянь, крім 1-го. Перше рівняння на цьому кроці було вибране як *ведуче рівняння*, а відмінний від нуля коефіцієнт як ***ведучий коефіцієнт*** (або ***ведучий елемент***).

Виберемо тепер нове ведуче рівняння. Якщо $a'_{22} \neq 0$, то за ведуче можна вибрати друге рівняння, а елемент a'_{22} вважати ведучим елементом.

Поділивши друге рівняння на a'_{22}, дістанемо:

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 + \dots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}} x_n = \frac{b'_2}{a'_{22}} .$$

Помноживши це рівняння на a'_{32}, потім на a'_{42}, …, потім на a'_{n2} і віднімаючи відповідно від 3-го, 4-го, …, n-го рівняння, дістанемо еквівалентну систему:

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & + & \ldots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 & , \\
 & & x_2 & + & a''_{23}x_3 & + & \ldots & + & a''_{2n}x_n & = & b''_2 & , \\
 & & & & a''_{23}x_3 & + & \ldots & + & a''_{3n}x_n & = & b''_3 & , \\
 & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
 & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
 & & & & a''_{m3}x_3 & + & \ldots & + & a''_{mn}x_n & = & b''_m & .
\end{array}
\right.
$$

Отже, після другого кроку ми виключили ще одну невідому – з всіх рівнянь, крім 1-го і 2-го.

Продовжуючи і далі цей процес, ми можемо дістати таке рівняння:

$$0 \cdot x_s + 0 \cdot x_{s+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = b_s \neq 0\,, \tag{1.16}$$

наявність якого свідчить про те, що система несумісна ($r \neq \bar{r}$).

Якщо з’явиться рівняння:

$$0 \cdot x_s + 0 \cdot x_{s+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = 0\,,$$

то його треба відкинути (при цьому буде вже $r = \bar{r} < n$) і продовжити процес елементарних перетворень.

Якщо $r = \bar{r} = n$, то не більше аніж за r кроків дістанемо таку систему:

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & d'_{12}x_2 & + & d'_{13}x_3 & + & \ldots & + & d'_{1n}x_n & = & b'_1\,, \\
 & & x_2 & + & d''_{23}x_3 & + & \ldots & + & d''_{2n}x_n & = & b''_2\,, \\
 & & & & x_3 & + & \ldots & + & d'''_{3n}x_n & \ldots & b'''_3\,, \\
 & & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & & & & & x_n & = & b'''_m\,.
\end{array}
\right.
\tag{1.17}
$$

З останнього рівняння дістаємо x_n, потім з $(n-1)$-го – x_{n-1} тощо, тобто знаходимо єдиний розв’язок.

Якщо $r = \bar{r} < n$, то замість верхньотрикутної системи (1.17) ми дістанемо трапецієподібну систему:

$$
\left\{
\begin{array}{lllllll}
x_1 + & d'_{12}x_2 & + d'_{13}x_3 & + \ldots + & d'_{1r+1}x_{r+1} & + \ldots + & d'_{1n}x_n = b'_1\,, \\
 & x_2 & + d''_{23}x_3 & + \ldots + & d''_{2r+1}x_{r+1} & + \ldots + & d''_{2n}x_n = b''_2\,, \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\
 & & & x_r + & d'''_{rr+1}x_{r+1} & + \ldots + & d'''_{rn}x_n = b'''_r\,.
\end{array}
\right.
\tag{1.18}
$$

Переносячи невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n у праву частину рівнянь, тобто вибираючи їх як вільні, а невідомі x_1, x_2, …, x_n як базисні, дістаємо загальний розв’язок:

$$
\left\{
\begin{array}{lllllll}
x_1 = & b'_1 - & a'_{1r+1}x_{r+1} & - \ldots - & a'_{1n}x_n & , \\
x_2 = & b''_2 - & a''_{2r+1}x_{r+1} & - \ldots - & a''_{2n}x_n & , \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
x_r = & b'''_r - & a'''_{rr+1}x_{r+1} & - \ldots - & a'''_{rn}x_n & .
\end{array}
\right.
$$

Розглянутий метод називається методом Гауса.

Відзначимо, що перехід від (1.5) до (1.17) або (1.18) є ***прямий хід*** метода Гауса, а процес розв’язування систем (1.17) і (1.18) – ***обернений хід*** метода Гауса.

Приклади.

1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Віднімаючи перше рівняння від другого і додаючи до третього і четвертого дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 4, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Наявність рівняння типу (1.16) (третє рівняння) доводить несумісність системи.

2. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Виключаємо x_1 з другого та третього рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

і переставляємо місцями друге та третє рівняння:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

Тепер обернений хід: $x_3 = -1 + x_4$.

З другого рівняння дістаємо $x_2 = 3 - x_4$, а з першого: $x_1 = 5 - 2x_4$.

Отже,

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_4, \\ x_2 = 3 - x_4, \\ x_3 = -1 + x_4 \end{cases}$$

є загальний розв'язок системи.

Розглянемо, наприклад, три системи лінійних рівнянь, які відрізняються лише стовпцями вільних членів:

$$AX = B_1,\ AX = B_2 \text{ і } AX = B_3$$

Легко переконатися, що методи виключення, наприклад, метод Гауса, дає можливість одночасного розв'язування усіх трьох систем.

Дійсно, замість

$$(A \mid B_1),\ (A \mid B_2),\ (A \mid B_3)$$

можна утворити матрицю

$$(A \mid B_1 \mid B_2 \mid B_3),$$

елементарні перетворювання якої дадуть розв'язки усіх трьох систем, одночасно.

1.9 Вектори і дії над ними. Скалярний добуток векторів

Геометричним вектором на площині R^2 або у просторі R^3 називається спрямований відрізок. Іншими словами, це відрізок, який, крім довжини характеризується також напрямком. Вектори позначають, як правило, латинськими літерами із стрілкою зверху $\vec{a}$.

Найпростіший приклад вектору, це сила, яка прикладена до якоїсь точки. Тоді довжина вектора характеризує величину сили, а напрямок – напрямок сили.

Над векторами можна здійснювати наступні операції, що називаються лінійними.

1. Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{a}+\vec{b}$, який отримують користуючись правилом трикутника або паралелограма.

Правило трикутника: початок другого вектора паралельно переносимо в кінець першого. Вектор, спрямований з початку першого вектора в кінець другого й буде сумою векторів.

Правило паралелограма: початок другого вектора паралельно переносять в початок першого і проводять діагональ у паралелограмі, сторонами котрого є вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2. Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, такий що $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Вектор $\vec{c}$ будують наступним чином: початок вектора $\vec{b}$ переносять в початок вектора $\vec{a}$ і проводять вектор із кінця вектора $\vec{b}$ в кінець вектора $\vec{a}$.

3. Добутком вектора $\vec{a}$ на число k називається вектор $k\vec{a}$ за напрямком співпадаючий з вектором $\vec{a}$, якщо $k>0$ (або спрямований в зворотній бік, якщо $k<0$) і довжиною в $|k|$ разів більшій за вектор $\vec{a}$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***колінеарними***, якщо вони належать одній прямій, або лежать на паралельних прямих $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***компланарними***, якщо вони належать одній площині.

Базисом на площині називають два будь які вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що не є колінеарними.

Базисом у просторі називають три будь які вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що не є компланарними.

Базис називається ортонормованим, якщо вектори, що його складають, ортогональні, тобто взаємо перпендикулярні, і нормовані, тобто мають одиничну довжину.

Базис характеризується тією властивістю, що будь який інший вектор можна представити у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Декартовою прямокутною прямолінійною системою координат називається сукупність точки – початку координат – та осей координат. На площині це дві перпендикулярні осі координат, у просторі – три взаємно перпендикулярні осі.

На кожній з осей відкладемо вектори одиничної довжини: $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Ці вектори називають ***базисними векторами***, або ортами.

Розглянемо вектори, які виходять з початку координат, точки (0,0). Кожний із векторів можна охарактеризувати координатами його кінця. На площині це два числа (x, y), у просторі – три (x, y, z). Ці числа називаються координатами вектора.

Базисні вектори мають координати: $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

Операції над векторами, які було визначено раніше, розглянемо для векторів із простору R^3, поданих у координатній формі. Тоді, наприклад, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна записати у вигляді: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$, де a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z є координатами векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1. ***Сумою*** двох векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ є вектор $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Ця формула цілком ідентична формулі складання двох матриць.

2. ***Аналогічно***, різницею векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ є вектор $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

3. ***Добутком*** вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ на число k є вектор $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$. Ця формула також співпадає із формулою добутку матриці на число.

Окрім добутку вектора на число існують також кілька видів добутків вектора на вектор, які ми розглянемо нижче.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Скалярний добуток векторів має наступні властивості:

1. Комутативність $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

2. Асоціативність відносно числового множника $(k\vec{a}, \vec{b}) = k(\vec{a}, \vec{b})$

3. Дистрибутивність $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$

4. Скалярний добуток ортогональних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює нулю: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

5. Скалярний добуток колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює добутку їх довжин: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0 = |\vec{a}||\vec{b}|$

6. Скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює квадрату його довжини.

Для векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданих в координатній формі, скалярний добуток дорівнює $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Приклад. Дано вектори $\vec{a} = (1,2,3)$ і $\vec{b} = (2,-3,4)$. Тоді їх скалярний добуток дорівнює $(1,2,3)(2,-3,4) = 2 - 6 + 12 = 8$.

1.10 Векторний та мішаний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який розташований перпендикулярно до площини, в якій знаходяться вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, спрямований так, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють *праву трійку векторів*, і має довжину $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює площі паралелограма, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

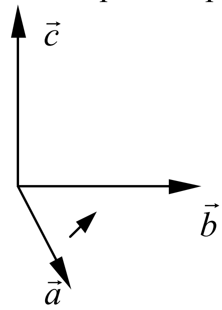

Рис. 1.3. Векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$

Права трійка означає, що коли повертати вектор $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ по найменшому куту, то вектор $\vec{c}$ буде спрямований за правилом правого гвинта (рис. 1.3).

Для векторів, поданих в координатній формі $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, векторний добуток дорівнює визначнику, перший рядок якого складається з одиничних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, в другому рядку записані координати вектора $\vec{a}$, а в третьому – координати вектора $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число $\left(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\right)$ – скалярний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ на $\vec{c}$.

Для векторів, поданих у координатній формі, мішаний добуток дорівнює визначнику, перший рядок якого містить координати вектора $\vec{a}$, другий – координати вектора $\vec{b}$ і третій – координати вектора $\vec{c}$:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Геометрично модуль мішаного добутку векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, утвореного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1.11 Рівняння площини у просторі та прямої на площині

Вектор $\vec{n}$ називається нормальним вектором до площини Q, якщо він перпендикулярний будь-якому вектору з цієї площини.

Знайдемо рівняння площини, яка проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор.

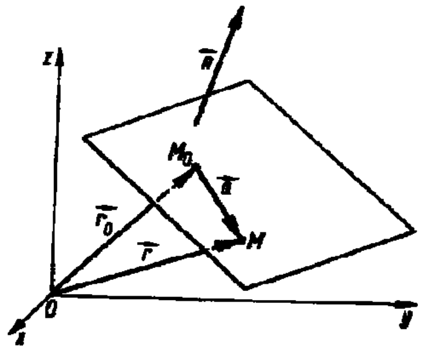

Рис. 1.4 – Площина у просторі

Візьмемо визначену точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на площині Q та довільну точку $M(x, y, z)$ з тієї ж площини. Тоді вектор $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$ буде перпендикулярним до нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$. Це означає, що їх скалярний добуток має дорівнювати нулю:

$$\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}\right)\vec{n} = 0$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1.19)$$

Це рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має заданий нормальний вектор. Рівняння (1.19) називається також ***нормальним рівнянням площини***.

Цілком аналогічно для прямої у площині можна побудувати рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор (***нормальне рівняння прямої***):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 .$$

Розкриємо дужки в рівнянні (1.19):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 ,$$

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0 ,$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Таке рівняння називається ***загальним рівнянням площини***. Коефіцієнти A, B, C, D не перетворюються одночасно у нуль. ***Загальне рівняння прямої*** на площині може бути отримане таким же чином і має вигляд:

$$Ax + By + C = 0 .$$

Зробимо деякі перетворення в загальному рівнянні площини. Перенесемо D вправо і розділимо на нього обидві частини рівності:

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1 ,$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1 ,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

де $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$.

Ми отримали рівняння, яке називається ***рівнянням площини у відрізках на осях***.

Те ж саме справедливо і для прямої на площині. Нехай задано загальне рівняння прямої:

$$Ax+By+C=0,$$

де A, B, C не перетворюються одночасно у нуль.

Перенесемо C вправо і розділимо на нього обидві частини рівності:

$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1,$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

де $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$. Ми отримали рівняння, яке називається ***рівнянням прямої у відрізках на осях***.

Таким чином, пряму на площині або площину у просторі можна задати нормальним рівнянням, загальним або рівнянням у відрізках. Зазначимо, що всі ці рівняння еквівалентні одне одному і є лише різними способами аналітичного представлення прямої та площини.

Приклад.

1. Знайти кут між площинами Q_1, Q_2, які задані своїми загальними рівняннями:

Q_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

Q_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Кут між площинами дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{n}_1=\left(A_1,B_1,C_1\right)$ і $\vec{n}_2=\left(A_2,B_2,C_2\right)$. Як відомо, координати нормальних векторів дорівнюють коефіцієнтам загальних рівнянь. Так чином, задача зводиться до знаходження кута між векторами $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Відзначимо, що у тому випадку, коли дві площини перпендикулярні, виконується рівність: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

2. Знайти кут між двома прямими l_1, l_2, які задані своїми загальними рівняннями:

l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$,

l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$,

Аналогічно до попереднього прикладу кут між прямими дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{n}_1=\left(A_1,B_1\right)$ і $\vec{n}_2=\left(A_2,B_2\right)$. Тепер знаходимо кут між векторами $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

А умова перпендикулярності двох прямих буде мати вигляд: $A_1A_2+B_1B_2=0$.

1.12 Рівняння прямої у просторі

Якщо задати у просторі дві непаралельні площини, то вони будуть перерізатися по прямій. Для того, щоб точка M належала цій прямій, необхідно (і достатньо), щоб вона належала кожній із площин. Іншими словами, вона має задовольняти системі рівнянь площин у просторі:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Такий спосіб визначення прямої називається ***загальним рівнянням прямої у просторі***.

Вектор $\vec{s}$ називається ***напрямним вектором*** для прямої l, якщо вектор $\vec{s}$ розташований на прямій l або на прямій, яка паралельна l (рис. 1.5).

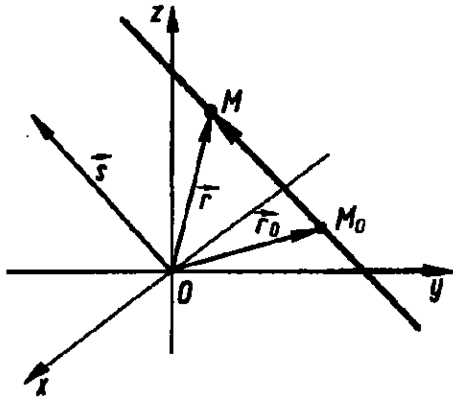

Рис. 1.5 – Пряма у просторі

Нехай задані точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить прямій l, і напрямний вектор $\vec{s}(m, n, p)$. Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$, що належить прямій.

Оскільки вектор $\vec{s}$ паралельний до прямої l, то вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ також буде паралельним вектору $\vec{s}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{s}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\vec{s}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{s}$$

Перепишемо останнє рівняння в координатній формі:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(m, n, p).$$

Для того, щоб два вектори дорівнювали один одному, необхідно, щоб співпадали їх координати:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda m \\ y = y_0 + \lambda n \\ z = z_0 + \lambda p \end{cases}$$

Ця система називається ***параметричним рівнянням прямої в координатній формі***.

Тепер розв'яжемо кожне рівняння відносно λ.

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x-x_0}{m} \\ \lambda = \dfrac{y-y_0}{n} \\ \lambda = \dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$$

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Ми дістали ***канонічне рівняння прямої*** у просторі.

Приклад.

Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

За напрямний вектор можна взяти вектор $\vec{s} = M_1M_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Тоді рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і має напрямний вектор $\vec{s}$, буде мати вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

Приклад.

Знайти кут між двома прямими l_1, l_2, які задані своїми канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{\rho_1},$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{\rho_2}.$$

Кут між прямими буде дорівнювати куту між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, \rho_1)$ та $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, \rho_2)$. Отже, нам достатньо знайти кут між векторами $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + \rho_1\rho_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + \rho_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + \rho_2^2}}.$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $m_1m_2 + n_1n_2 + \rho_1\rho_2 = 0$.

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то їх напрямні вектори паралельні: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$.

1.13 Криві другого порядку на площині

Розглянемо найпростіші криві на площині. До таких кривих відносять еліпс, гіперболу та параболу. Під порядком кривої розуміють максимальний показник степеня, що входить у рівняння кривої.

Еліпсом називають геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох даних точок є сталою величиною. Ці дві обрані точки називаються ***фокусами еліпса***.

Відстань між фокусами F_1 і F_2 позначимо $2c$, а суму відстаней від точки $M(x, y)$, що належить еліпсу, до фокусів позначимо $2a$.

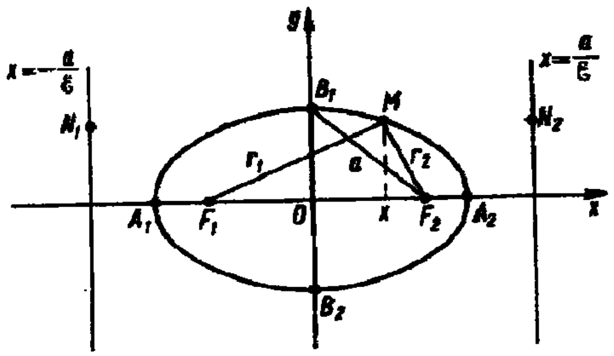

Рис. 1.6 – Еліпс

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – координати фокусів;

$$F_1M + F_2M = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a .$$

Другий корінь переносимо вправо і підносимо обидві частини рівності до квадрата:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2\left(x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right)$$

$$x^2\frac{c^2}{a^2} - 2xc + a^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

Позначимо $b^2 = a^2 - c^2$. Тоді рівняння буде мати вигляд:

$$x^2\frac{b^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – ***канонічне рівняння еліпса***.

Якщо $a = b$, то дістанемо рівняння кола.

Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B(0,b)$ називаються вершинами еліпса; a, b – півосі еліпса. Та піввісь, яка більше, називається більшою піввіссю.

Ексцентриситетом еліпса називається величина ε, яка дорівнює відношенню половини фокусної відстані до довжини більшої півосі.

$$\varepsilon = \frac{c}{a},\ 0 \le \varepsilon < 1 .$$

Ексцентриситет еліпса ε вказує на витягнутість еліпса відносно осі. Якщо $\varepsilon = 0$, то ми отримаємо коло.

Нехай a – більша піввісь еліпса. ***Директрисами*** еліпса називається пара прямих, які перпендикулярні більшій півосі еліпса і мають рівняння $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Директриси розташовані лівіше лівої вершини та правіше правої (рис. 1.6). Для довільної точки еліпса $M(x, y)$ має місце властивість:

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon,\ \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,$$

де r_1, r_2 – відстані від точки M до лівого і правого фокусів;

d_1, d_2 – відстані від точки M до лівої та правої директрис.

Гіперболою називають геометричне місце точок, різність відстаней від яких до двох даних точок є величиною сталою. Ці дві обрані точки називаються фокусами гіперболи.

Аналогічно до еліпса введемо наступні позначення:

$2a$ – різність відстаней;

$2c$ – відстань між фокусами.

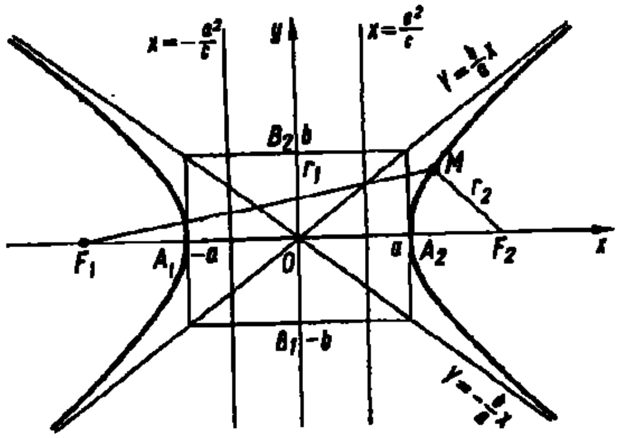

Рис. 1.7 – Гіпербола

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить гіперболі.

$$F_1M - F_2M = \pm 2a.$$

Знак "+" буде у випадку, коли $F_1M > FM_2$, і "–", якщо $F_1M < FM_2$.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Підносимо до квадрата обидві частини рівняння:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = x\frac{c}{a} - a$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = x^2\frac{c^2}{a^2} - 2xc + a^2$$

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2.$$

Позначимо $b^2 = -a^2 + c^2$. Тоді рівняння буде мати вигляд: $-x^2\frac{b^2}{a^2} + y^2 = -b^2$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – ***канонічне рівняння гіперболи***.

Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ називають *вершинами* гіперболи, точки $B_1(0,-b)$, $B(0,b)$ – *уявними вершинами* гіперболи.

$A_1A_2=2a$ – дійсна вісь гіперболи;

$B_1B_2=2b$ – уявна вісь гіперболи.

Гіпербола має похилі асимптоти (прямі, до яких гілки гіперболи наближаються нескінченно близько, але не торкаються їх), що задаються рівняннями: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

Ексцентриситетом гіперболи називається величина ε, яка дорівнює відношенню половини фокусної відстані до дійсної півосі: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, $\varepsilon>1$.

Ексцентриситет характеризує витягнутість гіперболи вздовж дійсної осі.

Директрисами гіперболи називається пара прямих, що перпендикулярні дійсній осі та мають рівняння $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Оскільки $\varepsilon>1$, то директриси розташовані лівіше правої та правіше лівої вершини. Як і для еліпса, для будь-якої точки $M(x,y)$ гіперболи виконано рівність

$\dfrac{r}{d}=\varepsilon$,

де r – відстань від $M(x,y)$ до фокуса;

d – відстань від $M(x,y)$ до відповідної директриси.

Параболою називається геометричне місце точок, розташованих на однаковій відстані від даної точки та даної прямої.

Точка, про яку йде мова в означенні, називається фокусом параболи, а пряма – директрисою.

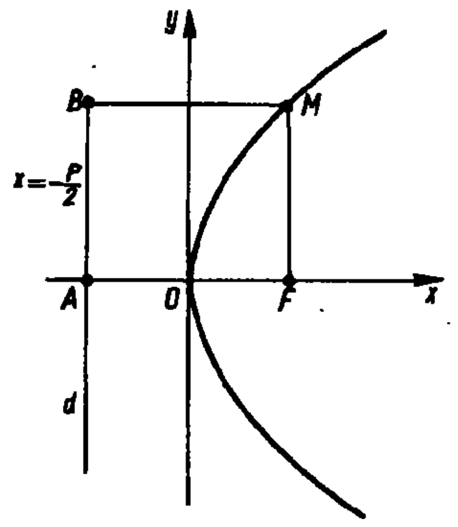

Рис. 1.8 – Парабола

Точку $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ називають ***фокусом*** параболи, а пряму $x=-\dfrac{p}{2}$ – ***директрисою***,

де p – відстань між директрисою та фокусом параболи;

r – відстань від фокуса до довільної точки $M(x,y)$, що належить гіперболі;

d – відстань від директриси до точки $M(x,y)$.

Згідно з означенням гіперболи, $r=d$.

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Підносимо до квадрата обидві частини рівняння:

$$x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4}.$$

Скорочуючи, дістанемо канонічне рівняння параболи:

$$y^2=2px,$$

де p – параметр параболи, $p>0$.

Графік параболи, симетричний відносно осі OX, розташований справа від осі OY. Точка $(0,0)$ називається *вершиною* параболи.

Ексцентриситет параболи завжди дорівнює одиниці: $\varepsilon=\frac{r}{d}=1$.

Загальне рівняння кривої другого порядку на площині

Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (1.20)$$

Для того, щоб визначити тип кривої, необхідно обчислити визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2.$$

В залежності від знака визначника, криві класифікуються наступним чином.

1. $AC-B^2>0$ – крива еліптичного типу;
2. $AC-B^2=0$ – крива параболічного типу;
3. $AC-B^2<0$ – крива гіперболічного типу.

Така класифікація пов'язана з тим, що шляхом паралельного переносу та повороту системи координат із рівняння (1.20) можна отримати рівняння відповідного типа (еліпс, параболу або гіперболу).

1.14 Поняття поверхні у просторі

Циліндричною поверхнею називається поверхня, утворена переміщенням прямої паралельно сталому вектору вздовж деякої просторової лінії L, що називається ***напрямною***.

Прямі, які проходять через лінію L паралельно сталому вектору, про який іде мова в означені, називаються твірними.

Загальний спосіб завдання циліндричної поверхні полягає в наступному.

Крива L подається як лінія перетину поверхонь:

$$L:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}.$$

Задається пряма своїм напрямним вектором $\vec{s}=(m,n,p)$. Тоді кожна твірна пряма може бути задана напрямним вектором $\vec{s}$ і точкою $M(x,y,z)$, яка належить кривій L і через яку проходить твірна пряма:

$$l\ :\ \frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}.$$

Слід відмітити, що циліндрична поверхня нескінченна у напрямку напрямних кривих, а крива L може бути як скінченою, так і нескінченною.

Приклад 1.

Напрямна крива $L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$.

Твірні прямі задано напрямним вектором $\vec{s}=\left(0,0,1\right)$.

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо рівняння поверхні:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

Така поверхня називається ***еліптичним циліндром*** (рис. 1.9).

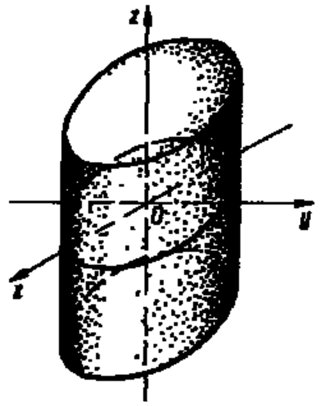

Рис. 1.9 – Еліптичний циліндр

Приклад 2.

Знайти рівняння поверхні, якщо напрямна крива задана системою рівнянь

$$L\ :\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},$$

а твірні прямі задано напрямним вектором $\vec{s}=\left(0,0,1\right)$.

Розв'язуючи систему рівнянь, дістанемо рівняння поверхні:

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

Така поверхня називається ***гіперболічним циліндром*** (рис. 1.10).

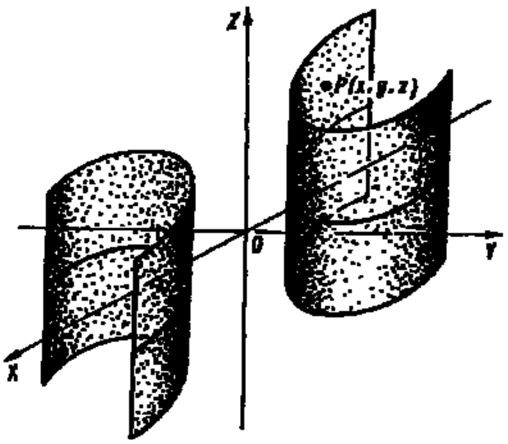

Рис. 1.10 – Гіперболічний циліндр

Приклад 3.

Знайти рівняння поверхні, якщо напрямна крива задана системою рівнянь

$$L \quad : \begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases};$$

$$L$$

а твірні прямі задано напрямним вектором $\vec{s} = (0,0,1)$.

Розв'язуючи систему рівнянь, дістанемо рівняння поверхні:

$$Y^2 = 2pX.$$

Така поверхня називається ***параболічним циліндром*** (рис. 1.11).

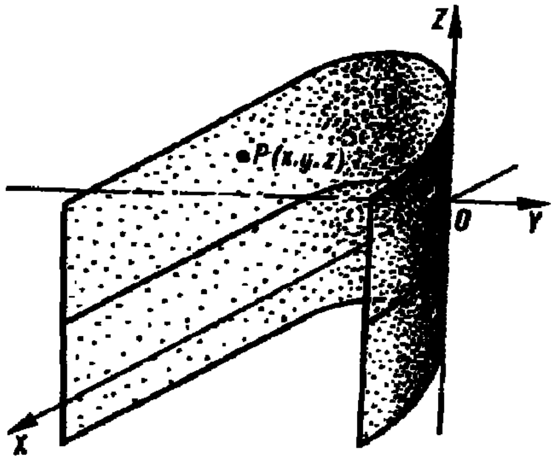

Рис. 1.11. – Параболічний циліндр

Конічною поверхнею називається поверхня, яка створена прямими, що проходять через задану точку O і перетинають задану лінію L.

Лінія L, про яку йде мова в означенні, називається ***напрямною***, точка O – ***вершиною***, а прямі – ***твірними***.

Напрямна лінія задається як перетин поверхонь:

$$L: \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

Твірні прямі мають проходити через вершину $O(x_0, y_0, z_0)$ і точку $A(x,y,z) \in L$. Тоді твірні прямі будуть мати рівняння:

$$l: \frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0}.$$

Розв'язавши систему рівнянь і виключивши x, y, z, дістанемо $\varphi(X,Y,Z) = 0$.

Приклад.

Знайти рівняння конічної поверхні, вершина якої знаходиться у точці $O(0,0,0)$, а напрямна

$$L \quad : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}.$$

Тоді рівняння твірних прямих: $\dfrac{X}{x} = \dfrac{Y}{y} = \dfrac{Z}{z}$.

Підставляючи $z = c$, дістанемо: $x = \dfrac{Xc}{Z}$, $y = \dfrac{Yc}{Z}$.

Підставляємо у рівняння еліпса:

$$\frac{X^2c^2}{z^2a^2} + \frac{Y^2c^2}{b^2Z^2} = 1$$
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.$$

Тривісним еліпсоїдом називається поверхня, яка описується рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, де a, b, c – півосі еліпсоїда. Еліпсоїд у просторі подібний до еліпса на площині: його проекція на кожну із координатних площин є еліпсом (рис. 1.12).

Рис. 1.12 – Тривісний еліпсоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка описується рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, де a, b, c – півосі гіперболоїда (рис. 1.13).

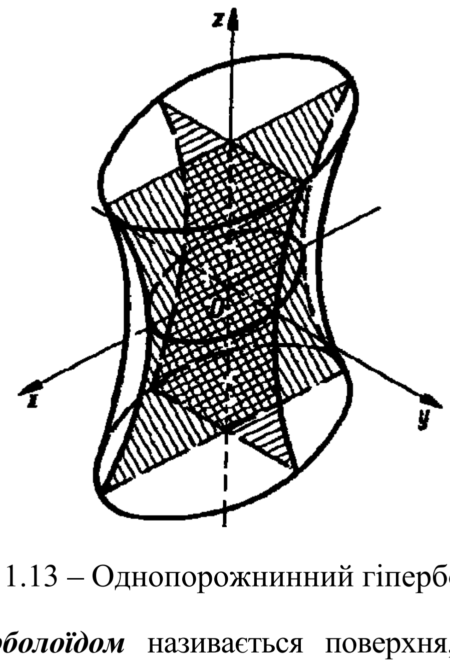

Рис. 1.13 – Однопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка дається рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, де a, b, c – півосі гіперболоїда. На відміну від попереднього, цей гіперболоїд складається із двох не з'єднаних між собою поверхонь (рис. 1.14).

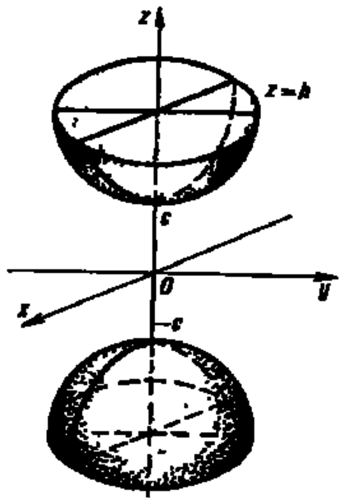

Рис. 1.14 – Двопорожнинний гіперболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка описується рівнянням $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$, де p та q мають однакові знаки: $pq>0$ (рис. 1.15).

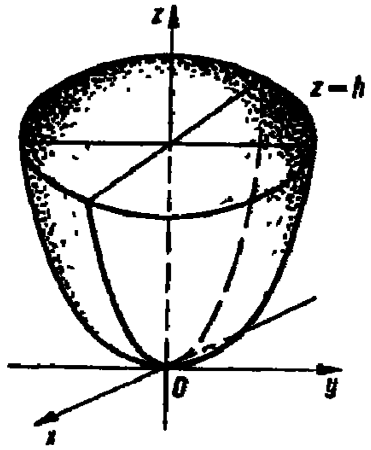

Рис. 1.15 – Еліптичний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка описується рівнянням $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$, де p та q мають однакові знаки: $pq>0$ (рис. 1.16).

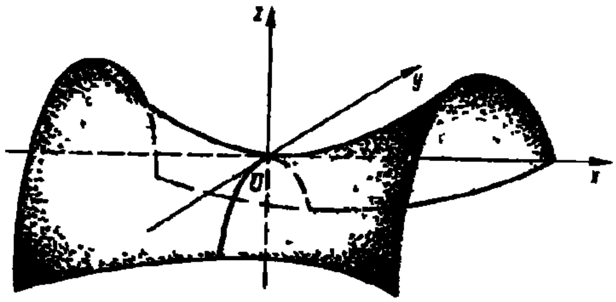

Рис. 1.16 – Гіперболічний параболоїд

Контрольні запитання і задачі до розділу 1

1. Наведіть визначення визначників другого і третього порядків.
2. Сформулювати основні властивості визначників.
3. Мінор і алгебраїчне доповнення визначника.

4. Обчислення визначників довільного порядку.

5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$.

6. Наведіть визначення матриці та основних дій над матрицями.

7. Обчислення оберненої матриці.

8. Обчислити обернену матрицю для матриці $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Яка система рівнянь називається лінійною?

10. Наведіть основні методи розв'язання системи лінійних рівнянь.

11. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь методом Гауса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

12. Застосуйте матричний метод для розв'язання системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

13. Застосуйте метод Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

14. Сформулювати визначення геометричного вектора.

15. Лінійні операції над векторами.

16. Колінеарні і компланарні вектори.

17. Лінійна залежність векторів.

18. Базис системи векторів на площині й у просторі.

19. Дати визначення скалярного добутку двох векторів.

20. Дати визначення векторного добутку двох векторів. Геометричний зміст векторного добутку.

21. Дати визначення мішаного добутку двох векторів. Геометричний зміст мішаного добутку.

22. Обчисліть векторний добуток векторів $\vec{a} = (1,-2,4)$ і $\vec{b} = (2,3,-6)$

23. Знайдіть об'єм паралелепіпеду, побудованого на векторах $\vec{a} = (-2,1,3)$, $\vec{b} = (7,-3,3)$, $\vec{c} = (-5,6,8)$.

24. Сформулювати основні задачі і методи аналітичної геометрії.

25. Рівняння лінії і прямої лінії на площині.

26. Види рівнянь прямої на площині.

27. Кут між прямими і точка їх перетину.

28. Рівняння поверхні і площини у просторі.

29. Рівняння прямої у просторі.

30. Взаємне розташування площини і прямих у просторі.

31. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M = (1,3,-5)$ і має нормальний вектор $\vec{n} = (3,4,7)$.

32. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M = (3,5,-6)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (2,-3,7)$.

33. Дайте визначення еліпса, гіперболи і параболи.

34. Назвіть основні типи поверхонь у просторі.

РОЗДІЛ 2. ФУНКЦІЯ

2.1 Символіка математичної логіки

Математичною зветься логіка, що розвивається за допомогою математичних (алгебраїчних) методів, і вивчає методи побудови математичних доведень і питання основ математики. При цьому для скорочення запису застосовують спеціальні символи, а саме квантори й операції над висловлюваннями. Розглянемо деякі з них.

Квантором загальності називаються вирази: "для всіх", "для кожного", "для всякого", "яке б не було". Його позначають символом $\forall$. Так, запис $\forall x$ можна читати: для всіх x.

Квантором існування називаються вирази: "існує таке", "знайдеться таке" і позначаються символом $\exists$. Так, запис $\exists x$ означає: існує таке x.

Додамо, що запис $\exists! x$ означає "існує єдине x".

До операцій над висловлюваннями відносяться, зокрема, такі.

Заперечення. Запереченням висловлювання p є висловлювання "не p", що позначають $\overline{p}$. Очевидно, що $\overline{\overline{p}} = p$. Запис $p = q$ означає, що висловлювання p і q рівносильні.

Слідування (імплікація). Вирази "якщо p, то q", або "з p випливає q" записують $p \Rightarrow q$ ($\Rightarrow$ знак імплікації).

Еквівалентність (рівносильність). Якщо $p \Rightarrow q$ і $q \Rightarrow p$, то твердження p і q еквівалентні, що записують так: $p \Leftrightarrow q$.

2.2 Поняття множини

З різними множинами зустрічаються завжди, а не тільки в математиці. Приклади множин: множина всіх мешканців даного міста, множина пожежних депо, множина всіх літер українського алфавіту, множина всіх книг у бібліотеці, множина всіх цілих додатних чисел, множина точок відрізку прямої і т.д.

Поняття множини є одним з найзагальніших понять математики. Засновником теорії множин був німецький математик Г. Кантор (1845-1918).

Множиною зветься сукупність, збір, з'єднання певних об'єктів, які при цьому називаються елементами множини.

Множини звичайно позначають великими літерами латинського алфавіту: $A, B, \ldots, X, \ldots$, а їхні елементи малими літерами. Наприклад, запис $A = \{a, b, c, \ldots, g\}$ означає, що множина A складається з елементів $a, b, c, \ldots, g$. Інші множини: $X = \{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ – множина X містить елементи $x_1, x_2, \ldots$; $X = \{x : \ldots\}$ – такий запис означає, що множина X складається з елементів x, властивості яких вказано після двокрапки. Так, множина $X = \{x : 0 < x < 1\}$ складається з усіх x, що більше 0 та менше 1.

З цих прикладів бачимо, що множина вважається заданою, якщо перелічені всі її елементи, або вказано спосіб чи властивість, які дозволяють встановити всі елементи множини.

Якщо елемент a міститься в множині A, то пишуть $a \in A$ (читають "a належить множині A").

Якщо елемент a не належить множині A, то пишуть $a \notin A$ (читають "a не належить множині A").

Множина, що не містить жодного елементу, називається ***порожнею*** і позначається спеціальним символом $\varnothing$. Наприклад, $\varnothing = \{x : x^2 + 1 = 0\}$, де x – дійсне число.

Деякі множини мають загальноприйняті позначення:

а) множина всіх натуральних чисел (цілих додатних)

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}\ ; \qquad (2.1)$$

б) множина всіх цілих чисел

$$Z = \{\dots - n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, m, \dots\}\ ; \qquad (2.2)$$

в) множина невід'ємних чисел

$$Z_0 = \{0, 1, 2, \dots n, \dots\}\ ; \qquad (2.3)$$

г) множина всіх раціональних чисел

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N \right\}; \qquad (2.4)$$

д) множина всіх дійсних чисел (раціональних й ірраціональних)

$$R = \{x : x = \pm a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots\}\ , \qquad (2.5)$$

де a – ціле невід'ємне число;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ – цифри десяткової системи числення, а саме $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

Якщо всі елементи множини B належать також множині A, то записують

$$\forall a \in B \Rightarrow a \in A$$

і кажуть, що множина B ***міститься*** в множині A або множина B є ***підмножиною*** множини A. Останній факт позначають символом включення $\subset$ або $\supset$. Таким чином маємо

$$(\forall a \in B \Rightarrow a \in A) \Leftrightarrow (B \subset A, \textit{або } A \supset B).$$

За означенням вважають, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною всякої підмножини: $\varnothing \subset A$.

Якщо для двох множин A і B водночас справджуються співвідношення $A \subset B$ і $B \subset A$, то вважають, що множина A дорівнює множині B, і пишуть $A = B$.

Відзначимо, що для множин N, Z, Z_0, Q, R існує такий ланцюг включень:

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R\,.$$

Якщо кожному елементу множини A можна поставити у відповідність порядковий номер з множини всіх натуральних чисел N (тобто перенумерувати всі елементи $a \in A$), то множину A називають ***зчисленою***. Можна довести, що множини Z_0, Z, Q зчислені, а множина всіх дійсних чисел R – незчисленна.

2.3 Змінні величини

Нагадаємо дві властивості дійсних чисел: ***щільність*** і ***суцільність***, або ***неперервність***. Щільність дійсних чисел полягає в тому, що між будь-якими двома дійсними числами знайдеться принаймні одне дійсне число. Цю властивість можна сформулювати й інакше: між будь-якими двома дійсними числами міститься незчисленна множина дійсних чисел. Друга властивість (неперервність) визначається теоремою Р. Дедекінда (1831-1910) і пов'язана з визначенням ірраціонального числа. Її можна схематично сформулювати так: всякий переріз (розподіл) множини дійсних чисел R на дві непорожні множини обов'язково здійснюється дійсним числом, тобто дійсні числа не мають розривів, прогалин, пропусків. Таку властивість дійсних чисел також називають ***повнотою***.

Змінною x називається величина, що набуває різні числові значення. Задати змінну x означає, що треба вказати множину X тих значень, які змінна здатна набувати. Якщо $\forall x \in X$ кожне значення x зустрічається один раз, то множину X називають областю зміни змінної x.

У математичному аналізі звичайно область зміни змінної x є деякою підмножиною множини дійсних чисел R. Розглянемо ці підмножини:

а) $X = \{x : a \le x \le b\} = [a,b]$ – проміжок, сегмент, замкнений інтервал. Зазначимо, що точки $a, b \in X$.

б) $X = \{x : a < x < b\} = (a,b)$ – відкритий інтервал. Зрозуміло, що $a \notin X$ і $b \notin X$.

в) $X = \{x : a < x \le b\} = (a,b]$ і $X = \{x : a \le x < b\} = [a,b)$ – напіввідкритий (або напівзамкнений) інтервал. В першому випадку $a \notin X$, $b \in X$, а в другому – $a \in X$, $b \notin X$.

Довжиною проміжку, сегмента, інтервалу у всіх випадках зветься число $b - a$.

Можна показати, що існує взаємно однозначна відповідність (ізоморфізм) між дійсними числами і точками дійсної числової осі, і, навпаки, кожній точці дійсної осі відповідає одне дійсне число. Тому наочним аналогом числового проміжку є відрізок дійсної числової осі.

Розглянемо числову множину $X = \{x\}$. Якщо $\forall x \in X : x \le M$, де M – деяке число, то кажуть, що множина X ***обмежена зверху***, а само число M є верхньою межею множини X. Аналогічно, якщо $\exists m$ (m – число): $\forall x \in X : x \ge m$, то кажуть, що множина X ***обмежена знизу***, а число m – нижня межа множини M.

З цього означення випливає, що множина X в пунктах а), б), в) є обмеженою і зверху, і знизу.

Не формулюючи поняття точної верхньої (нижньої) межі множини, зазначимо, що інтуїтивно зрозуміло, що у випадку а) число a є точною нижньою межею, а число b – точною верхньою межею. У випадку б) множина (a,b) не має ані нижньої, ані верхньої точної межі.

В математиці доводиться розглядати також й нескінченні проміжки (інтервали), коли одним з кінців (або обома) служать "невласні" числа $-\infty$ і $+\infty$ (мінус і плюс нескінченність), відносно яких вважають, що $-\infty < +\infty$ і для будь-якого дійсного числа a виконано $-\infty < a < +\infty$. Слід пам'ятати, що застосування цих чисел ($\pm\infty$) має цілковито умовний сенс, і треба стерегтися проводити арифметичні операції з цими "числами".

Таким чином, поряд з вказаними вище множинами розглядатимемо також наступні: $X = \{x : -\infty < x < a\} = (-\infty, a)$, $X = \{x : -\infty < x \le a\} = (-\infty, a]$ й, аналогічно, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ і $(-\infty, +\infty)$.

Якщо змінна $x \in X = \{x = c\}$, тобто якщо множина X містить тільки один елемент (одне число c), то таку змінну називатимемо "сталою", або "параметром".

2.4 Функція. Основні визначення

Головним предметом вивчення в математичному аналізі є не змінна як така, а вивчення залежності між двома або кількома змінними за їх одночасної зміни.

Приклади.

Площа кола залежить від радіуса R кола.

Висота падіння тіла у полі сил тяжіння $h = \frac{1}{2}gt^2$ залежить від часу t.

Об'єм паралелепіпеда $V = xyz$ залежить від довжин x, y, z його ребер.

Нехай дано дві змінні x і y з областями зміни X, Y. Нехай за умовою змінній x можна надавати довільне значення $x \in X$ без жодних обмежень. Якщо за деяким правилом або законом кожному значенню $x \in X$ ставиться у відповідність одне значення $y \in Y$, то змінну y називають ***функцією*** від змінної x з області її зміни.

Незалежна змінна x зветься ***аргументом*** функції, множина X – ***областю визначення*** (або ***існування***) функції, множина Y – ***областю значень*** функції. Остання область звичайно не вказується, оскільки ця область визначається законом або правилом.

Для позначення функції вживають наступні вирази: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$, $y = F(x)$ і т.д. Літери f, φ, y, F характеризують то правило, за яким дістають значення y за відомим x.

Дане означення функції належить Б. Больцано (1781-1848), чеському філософу і богослову.

Що це за правило чи закон в нашому означенні? Воно може бути надто різноманітної природи, оскільки нічим і ніяк не було обмежено.

Найпростішим і природнім є здійснення цього правила (закону) у вигляді *аналітичного виразу*, або *формули*, які містять вказівки на ті операції чи дії зі сталими і значеннями змінної x, які необхідно виконати, щоб дістати відповідне значення змінної y.

Аналітичний спосіб задання функції є найважливішим і найбільш розповсюдженим в математичному аналізі. Але в математиці є непоодинокі випадки, коли функція визначається без допомоги формул, як, наприклад, $y = \sin x$, $y = \arccos x$.

Існує також табличний спосіб, як, наприклад, таблиця логарифмів й графічний, коли функції надано геометричне зображення.

Зазначимо, що ***графіком функції*** $y = f(x)$ зветься множина точок площини OXY, для кожної з яких абсциса x є значенням аргументу, а ордината y – відповідним значенням функції. Хоча в математичному аналізі функції не задають графічно, але часто звертаються до графічної ілюстрації і застосовують графік як допоміжний спосіб дослідження функції.

Зауваження про аналітичний вигляд або формулу.

а) До формули (аналітичного виразу) входять всі операції і дії, що вивчаються в елементарній алгебрі і тригонометрії. Однак, до цього числа дій у подальшому будуть приєднуватися інші операції. Отже, повний зміст терміну "аналітичний вираз" розкриватиметься лише поступово.

б) Кожний аналітичний вираз, який містить аргумент x, має, як кажуть, природну область визначення. Це є множина тих значень x, для яких аналітичний вираз має сенс, тобто має сповна *визначене, скінчене і дійсне значення*.

Приклад. Функція $y=\sqrt{1-x^2}$ має сенс $\forall x\in[-1,1]$, функція $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ має сенс $\forall x\in(-1,1)$, оскільки ділити на нуль не можна.

в) Аналітичний вираз (формула) відіграє допоміжну роль щодо області визначення.

Приклад. Функція $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ має сенс $\forall t\in(-\infty,\infty)$, але тільки $\forall t\in\left[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$ ця функція визначає висоту падіння тіла. Таким чином, не можна ототожнювати функцію і формулу.

г) Можливі випадки, коли функція визначається різними формулами $\forall x\in X$.

Приклад.

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{якщо } x<0,\\ x+3, & \text{якщо } x\ge 0.\end{cases}$$

2.5 Елементи поведінки функції

1. ***Парність і непарність***. Функція $y=f(x)$ називається ***парною*** (***непарною***), якщо $\forall x\in X$ маємо $f(-x)=f(x)$ (відповідно, $f(-x)=-f(x)$). Функція може бути також ані парною, ані непарною.

Приклад. Функція $y=x^2$ є парною, а $y=x^3$ непарною. Функція $y=x^2+x^3$ є ані парною, ані непарною.

Будь-яку функцію $y=f(x)$ можна завжди зобразити у вигляді $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, де $f_1(-x)=f_1(x)$, а $f_2(-x)=-f_2(x)$. Дійсно, функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ можна записати так:

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right],$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-f(x)\right].$$

2. ***Періодичність***. Функція $y=f(x)$ називається ***періодичною***, якщо

$$\exists T\neq 0: f(x\pm T)=f(x)\,\forall x\in X$$

Найменше з додатних чисел T, яке задовольняє умові $f(x\pm T)=f(x)$, зветься ***періодом функції***.

3. ***Монотонність***. Функція $y=f(x)$, що визначена $\forall x\in X$, за умови $\forall x_1\in X$, $\forall x_2\in X$, $x_1<x_2$, називається

а) ***зростаючою***, якщо $f(x_2)>f(x_1)$;

б) ***неспадною***, якщо $f(x_2)\ge f(x_1)$;

в) ***спадною***, якщо $f(x_2)<f(x_1)$;

г) ***неспадною***, якщо $f(x_2)\le f(x_1)$.

Функції з такими властивостями звуться ***монотонними***, а функції у випадках а) і в) – ***строго монотонними***.

4. ***Обмеженість***. Функція $y = f(x)$ називається ***обмеженою зверху***, якщо $\exists M : f(x) \le M \ \forall x \in X$, і ***обмеженою знизу***, якщо $\exists m : f(x) \ge m \ \forall x \in X$.

Види функції, елементарні функції

Нехай функція $z = \varphi(y)$ визначена на множині Y, а функція $y = f(x)$ визначена на множині X, причому $y \in Y$. Тоді на множині X визначена функція

$$z = \varphi(f(x)),$$

яка називається ***складеною функцією***, або функцією від функції, або суперпозицією функцій y і φ. Підкреслимо, що складена функція відбиває не характер функціональної залежності, а лише спосіб її задання.

Приклад. Функція $z = \ln y$, $y \in Y = \{y : y > 0\}$ і функція $y = \sin x$, $x \in X = \{x : -\infty < x < \infty\}$. Суперпозицією цих функцій буде функція $z = \ln(\sin x)$, де $x \in X = \{x : \pi n < x < \pi n + \pi, n \in N\}$.

Нехай задано функцію $y = f(x)$ і $x \in X$, $y \in Y$. Тоді для кожного значення $y_0 \in Y$ знайдеться $x_0 \in X : y_0 = f(x_0)$. Подібних значень x_0 може виявитися декілька. Отже, кожному $y \in Y$ відповідає одне або кілька значень $x \in X$. У результаті на множині X визначається однозначна чи багатозначна функція $x = g(y)$, яка зветься ***оберненою функцією*** до функції $y = f(x)$.

Приклад. Функція $y = 3^x$, $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (0, \infty)$. Тоді функція $x = \log_3 y$ є однозначною оберненою функцією до функції $y = 3^x$ (і навпаки).

Приклад. Функція $y = x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in [0, \infty)$. В цьому випадку обернена функція $x = \pm\sqrt{y}$ є двозначною.

До ***основних елементарних функцій*** відносяться степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні (обернені тригонометричні).

Відокремлюють також класи *цілих* (*цілих раціональних*) функцій типу

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

і *дробово-раціональних* функцій, які є часткою двох цілих раціональних функцій, а також клас *ірраціональних* функцій, аналітичний вигляд яких містить радикали.

Степеневі, дробово-раціональні й ірраціональні функції та їх комбінації, складені за допомогою операцій додавання (віднімання) і множення (ділення), звуться ***алгебраїчними***.

Показникові, логарифмічні, тригонометричні і обернені тригонометричні функції називаються ***трансцендентними функціями***.

Перелічені вище функції складають клас ***елементарних функцій***.

У математичному аналізі ми будемо вивчати саме цій клас найпростіших функцій, а також всі ті, що можна здобути з них за допомогою арифметичних дій і суперпозицій, застосованих скінчене число разів.

Контрольні запитання до розділу 2

1. Дайте визначення кванторів існування та загальності.
2. Що називається множиною?
3. Що таке функція?

4. Способи завдання функції.
5. Що таке графік функції?
6. Яка функція називається парною? Непарною?
7. Що таке періодична функція і період функції?
8. Які функції відносять до основних елементарних функцій?

РОЗДІЛ 3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Поняття границі функції є одним з найважливіших понять диференціального числення. Зауважимо, що це поняття є дуже тонким і разом з тим дуже суттєвим і продуктивним поняттям математичного аналізу.

3.1 Границя числової послідовності

Нехай змінну x задано числами натурального ряду (з множини N), тобто $x \in N$. Значення деякої функції $y = f(x)$ при вказаних значеннях x позначимо

$$y_1 = f(1),\ y_2 = f(2), \dots, y_n = f(n), \dots \qquad (3.1)$$

Звичайно таку функцію у математиці звуть ***числовою послідовністю*** або функцією цілочисельного аргументу.

Приклад. Арифметична прогресія $\{y_n\}$, що має вигляд $y_n = a + (n-1)d$, де a – перший член прогресії, а d – її різниця.

Приклад. Геометричною послідовністю звуть послідовність $\{y_n\}$, для якої $y_n = aq^{n-1}$, де a – перший (загальний) член, а q – знаменник прогресії.

Може статися, що зі збільшенням номера n члени послідовності поступово наближаються до деякого числа A. Тоді кажуть, що y_n ***прямує*** до A, коли n зростає і пишуть $y_n \to A$ (n зростає).

Приклад. Розглянемо числову послідовність $y_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$, $n \in N$, яка послідовно набуває таких значень.

n	1	2	3	...	n	...
y_n	0,9	0,99	0,999	...	0,999...9	...

Тут очевидно, що $y_n \to A = 1$, якщо n зростає.

Дамо строге означення цього прямування.

Стале число A називають ***границею числової послідовності*** $y_n = f(n)$, якщо для кожного додатного числа $\varepsilon > 0$, яким би малим воно не було, існує такий номер N, що всі значення y_n з номерами $n > N$ задовольняють нерівності:

$$|y_n - A| < \varepsilon,\ \forall n > N. \qquad (3.2)$$

Той факт, що число A є границею числової послідовності y_n записують так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \qquad (3.3)$$

($\lim$ – скорочення від limes – латинського слова "границя"). Коли існує границя A, то іноді кажуть, що послідовність збігається до числа A.

Приклад. Розглянемо послідовність $y_n = 2 - \dfrac{1}{n}$. Бачимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2$, тобто $A = 2$. Цей факт означає, що $|y_n - 2| < \varepsilon$. Підставляючи в цю нерівність $y_n = 2 - \dfrac{1}{n}$, дістанемо $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, або $n > N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Отже, $\forall n > N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ справджується нерівність $|y_n - A| < \varepsilon$. Якщо $\varepsilon = 0{,}1$, то $N = 10$, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то $N = 100$ і т.д. Значить номер

N, починаючи з якого справджується нерівність $|y_n - A| < \varepsilon$, залежить від значення ε: значення числа N зростає, коли значення ε зменшується.

Коротко наше означення можна записати так.

Якщо $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ такий, що $\forall n > N \Rightarrow |y_n - A| < \delta$, то число A є границею послідовності.

Число A є границею послідовності y_n, якщо її значення відрізняються від A як завгодно мало (що визначається числом ε), починаючи з деякого місця (яке визначається числом N). Нерівність (3.2), де $\varepsilon > 0$ довільне, і є точним записом твердження, що послідовність y_n "відрізняється від A як завгодно мало", а номер N вказує те місце, "починаючи з якого" ця обставина здійснюється.

Дуже важливо усвідомлювати, що номер N, взагалі кажучи, не можна вказати раз і назавжди. Він залежить від вибору числа ε (див. приклад).

3.2 Границя функції неперервного аргументу

Вивчення границі функції неперервного аргументу почнемо з прикладу.

Приклад. Нехай маємо функцію $y = 2 - \frac{2}{x}$. Зрозуміло, що коли $x \to 1$, то $y \to 0$. Якщо $x \to \infty$, то коли значення x зростають, то значення дробу $\frac{2}{x}$ зменшуються, отже $y \to 2$.

Нехай змінну x задано множиною $X = \{x\}$. Будь-який відкритий інтервал $(a-\delta, a+\delta) \in X$, де $\delta > 0$, із центром в точці a називається ***δ-околом точки*** a, а число a – центром околу або граничною точкою.

Тобто множина точок x, що належать δ-околу, задовольняють нерівності

$a - \delta < x < a + \delta$. (3.4)

Звичайно δ-окіл позначають $O_\delta(a)$ або $O(a,\delta)$.

Таким чином, можна сказати, що кожний окіл точки a містить у собі нескінченну множину точок, значення яких відрізняються від a, тобто маємо множину

$O_\delta(a) = \{x : |x - a| < \delta\}$. (3.5)

Важливо підкреслити, що сама гранична точка може й не належати δ-околу. В цьому випадку кажуть, що маємо ***проколений окіл***, який позначають $\dot{O}_\delta(a)$ або $ПрO(a,\delta)$ і визначають:

$$\dot{O}_\delta(a) = \{x : 0 < |x - a| < \delta\} = \{x : x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)\}. \qquad (3.6)$$

Нехай в множині X існує деякий проколений окіл $\dot{O}_\delta(a)$ і дано функцію $y = f(x)$. Розглянемо поведінку цієї функції, коли x прямує до a.

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли x прямує до a, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що із нерівності $0 < |x - a| < \delta$ випливає нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (3.7)$$

Таким чином, нерівність (3.7) має виконуватися для будь-якої точки x, що належить проколеному δ-околу.

Скорочений запис має вигляд

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : 0 < \left| x - a \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon .$$

При цьому умова $|x-a| > 0$ означає, що $x \neq a$ (рис. 3.1).

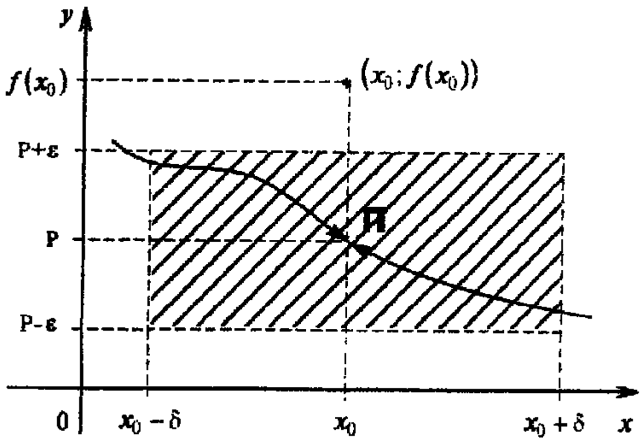

Рис. 3.1 – Границя функції у точці x_0

Той факт, що число A є границею функції $f(x)$, коли x прямує до a, записують так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A . \tag{3.8}$$

Коли x прямує до скінченого числа a, то може статися, що значення функції нескінченно зростає.

Функція $y = f(x)$ має границю $+\infty$, коли x прямує до a, якщо для кожного числа $M > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що із нерівності $0 < |x - a| < \delta$ випливає нерівність

$$f(x) > M . \tag{3.9}$$

В цьому випадку пишуть:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty . \tag{3.10}$$

Аналогічно визначається границя, якщо $f(x) \to -\infty$.

Символічно (3.9)-(3.10) можуть бути записані так:

$\forall M > 0\, \exists \dot{O}_\delta(a) : x \in \dot{O}_\delta(a) \Rightarrow f(x) > M$.

Коли множина $X = \{x\}$, на якій визначена функція $y = f(x)$, містить які завгодно великі (за модулем) додатні (від'ємні) значення x, то кажуть, що $+\infty$ $(-\infty)$ є граничними точками для X, які позначають $O_N(+\infty) = \{x : x > N, N > 0\}$ ($O_M(-\infty) = \{x : x < -M, M > 0\}$).

Функція $y = f(x)$ має границю A, коли x прямує до $+\infty$ $(-\infty)$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, знайдеться таке число $N > 0$, що із нерівності $x > N$, ($x < -N$) випливає

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon . \tag{3.11}$$

При цьому пишуть:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ (або } \lim_{x\to-\infty} f(x) = A\text{).} \tag{3.12}$$

Символічний запис має вигляд:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\dot{O}_M(+\infty): \forall x \in \dot{O}_M(+\infty) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Множину $\dot{O}_\delta^{(+)}(a) = \{x : a < x < a + \delta\}$ називають ***правим проколеним околом*** точки a, а $\dot{O}_\delta^{(-)}(a) = \{x : a - \delta < x < a\}$ – ***лівим проколеним околом***.

Число A називають ***правою границею функції*** $y = f(x)$, коли $x \to a$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для будь-якого $x \in (a, a+\delta)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, або у скороченому вигляді:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\dot{O}_\delta^{(+)}(a): \forall x \in \dot{O}_\delta^{(+)}(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Цей факт записують так:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A, \tag{3.13}$$

підкреслюючи, що $x \to a + 0$, тобто справа.

Аналогічно визначається ліва границя:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\dot{O}_\delta^{(-)}(a): \forall x \in \dot{O}_\delta^{(-)}(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon ,$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A. \tag{3.14}$$

Сутність всіх вищенаведених означень одна. Функція $y = f(x)$ має бути як завгодно "близько" до своєї границі, якщо її аргумент достатньо близький до своєї граничної точки. При цьому аргумент близький до своєї скінченої границі, якщо різниця між ними мала за модулем, і аргумент близький до нескінченної границі, якщо він великий за модулем.

Висловлені вище означення границі сформульовано так званою "$\varepsilon - \delta$" мовою.

Доведемо , що коли функція має границю, то ця границя єдина. Для цього спочатку розглянемо просту лему.

Лема. Якщо існує скінчена границя $\lim_{x\to a} f(x) = A$ і $A > P$ (або $A < Q$), де P і Q – будь-які додатні числа, то для значень x, достатньо близьких до a (і відмінних від a) виконується нерівність:

$$f(x) > P \text{ (відповідно, } f(x) < Q\text{).} \tag{3.15}$$

Доведення. Дійсно, візьмемо додатне число $\varepsilon = A - P$ (або $\varepsilon = Q - A$). Тоді маємо $A - \varepsilon > P$ (або $A + \varepsilon < Q$). Але за визначенням границі для цього ε знайдеться таке число δ, що із нерівності $|x - a| < \delta$ негайно дістаємо:

$$P < A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon < Q .$$

Отже, нерівність (3.15) є вірною.

Теорема (про єдиність границі). Функція $y = f(x)$ у точці a не може мати дві різні границі.

Доведення. Припустимо протилежне: нехай одночасно $\lim_{x\to a} f(x) = A$ і $\lim_{x\to a} f(x) = B$. Візьмемо число R таке, що $A < R < B$. Оскільки $f(x) \to A$ і $A < R$, то за лемою маємо $f(x) < R$. Але з іншого боку $f(x) \to B$ і $B > R$, тоді за лемою маємо $f(x) > R$. Таким чином, дістаємо суперечність, що й доводить правильність теореми. Отже встановлено: якщо границя функції існує, то вона єдина.

3.3 Нескінченно малі і нескінченно великі функції

Якщо функція $y = f(x)$ прямує до нуля, коли x прямує до a (або до $\pm\infty$), то її називають ***нескінченно малою функцією***. Її називають нескінченно великою, якщо $|f(x)|$ прямує до нескінченності. Коли функція $y = f(x)$ є ***нескінченно великою***, то кажуть, що вона обертається на нескінченність.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ є нескінченно великою в точці $x = a$, то функція $\left[f(x)\right]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою функцією.

Доведення. За умови теореми маємо $f(x) \to \infty$ при $x \to a$. Доведемо, що $\frac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to a$. Нехай маємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $f(x) \to \infty$, то для $M = \frac{1}{\varepsilon}$ при $|x - a| < \delta$ матимемо $f(x) > M = \frac{1}{\varepsilon}$. Але тоді $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} = \varepsilon$ і може бути яким завгодно малим.

Можна сформулювати і обернене твердження. Якщо функція $f(x)$ є нескінченно малою функцією, то $\frac{1}{f(x)}$ буде нескінченно великою.

Зауважимо, що терміни "нескінченно мала" та "нескінченно велика функція" є історично утвореними, але не дуже вдалими. Тому вони не повинні уводити нас до помилки. Дійсно, жодне окреме значення функції, якщо воно не нуль, не можна класифікувати як "мале". Сутність справи в тому, що функція $y = f(x)$ є змінною величиною, яка лише у процесі своєї зміни спроможна стати менше довільно взятого як завгодно малого ε. Так само нескінченно велика функція лише у процесі своєї зміни стає більше будь-якого великого числа N. Тобто поняття нескінченності є тільки потенційним, процесуальним поняттям.

А тепер доведемо деякі теореми про нескінченно малі функції, які слід розглядати як леми для доведення основних теорем про границі.

Лема 1. Якщо функція $y = f(x)$ має скінчену границю, то вона обмежена.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Тоді $\exists \delta : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. З іншого боку маємо $|f(x)| - |A| < |f(x) - A|$. А це означає, що $|f(x)| - |A| < \varepsilon$. Отже $|f(x)| < |A| + \varepsilon = M$, що й означає обмеженість функції $f(x)$.

Наслідок. Якщо $y = f(x) = c$, де c – стала, то

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Лема 2. Сума будь-якої скінченої кількості нескінченно малих функції є також нескінченно малою функцією.

Доведення. Обмежимось випадком двох функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$. Нехай

$f(x)=\alpha(x)+\beta(x)$. Доведемо, що $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Нехай дано довільне число $\varepsilon>0$. Оскільки $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими функціями, то існують такі $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, що

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |\beta(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Візьмемо δ таке, що $\delta<\delta_1$ та $\delta<\delta_2$. Тоді за таким значенням δ обидві нерівності дійсні водночас, тому $\forall x: 0<|x-a|<\delta$ дістаємо $|f(x)|=|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\varepsilon$. А це й означає, що функція $f(x)$ є нескінченно малою.

Наслідок. Різниця $\alpha(x)-\beta(x)$ двох нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

Лема 3. Добуток обмеженої функції $f(x)$ і нескінченно малої функції $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією.

Доведення. Маємо $f(x)<M$ (див. лему 1) і $|\alpha(x)|<\varepsilon_1$. Оскільки ε_1 – довільне, то нехай $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$. Тоді $\forall x: 0<|x-a|<\delta$ дістаємо $|f(x)\alpha(x)|=|f(x)||\alpha(x)|<M\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$, тобто

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\alpha(x)\right]=0.$$

Наслідок 1. Оскільки нескінченно мала функція є обмеженою, то добуток двох нескінченно малих функцій є також нескінченно малою функцією.

Наслідок 2. Якщо c – стала, то $c\alpha(x)$ – нескінченно мала функція.

Окрім властивостей, сформульованих в цих лемах, треба ще вміти порівнювати нескінченно малі функції за характером їх наближення до нуля. За основу порівняння двох нескінченно малих $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ беруть поведінку їх частки. При цьому припускатимемо, що та нескінченна мала, на яку ділимо, не обертається на нуль, принаймні $\forall x\in \dot{O}_\delta(a)$.

Якщо частка $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ (а з нею і $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$) має скінчену і відмінну від нуля границю при $x\to a$, то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються нескінченно малими ***одного порядку малості***. Вони називаються ***еквівалентними***, якщо границя їх частки дорівнює одиниці. Останній факт позначають $\alpha(x)\sim b(x)$.

Якщо частка $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ сама є нескінченно малою функцією (тоді частка $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ – нескінченно велика), то $\beta(x)$ вважається нескінченно малою функцією ***вищого порядку малості***, ніж $\alpha(x)$, і водночас $\alpha(x)$ – нескінченно мала ***нижчого порядку малості*** ніж $\beta(x)$. Цей факт записують $\beta=o(\alpha)$ (читають "β є о мале від α").

Зазначимо, якщо $\alpha(x)\sim\beta(x)$, то їх різниця $\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку малості ніж $\alpha(x)$ і $\beta(x)$: $\gamma = o(\alpha)$, $\gamma = o(\beta)$.

Приклад. $y_1 = 8x^2$ і $y_2 = x$. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y_1}{y_2} = \lim\limits_{x\to 0} 8x = 0$, отже $y_1 = o(y_2)$.

Приклад. $y_1 = \frac{40}{x^2}$ і $y_2 = \frac{1}{x^2}$. Обчислимо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y_1}{y_2} = 40$, отже y_1 і y_2 є нескінченно малими (коли $x\to\infty$) одного порядку малості.

3.4 Теореми про границі

Пригадуючи визначення границі, маємо, що коли $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то це означає, що за умови $0 < |x-a| < \delta$ справджується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Розглянемо допоміжну функцію $\alpha(x) = f(x) - A$. Оскільки $|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$, то і $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, отже функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією. А це означає, що коли функція $f(x)$ має границю, яка дорівнює A, то її завжди можна надати у вигляді (при $x\to a$):

$$f(x) = A + \alpha(x). \qquad (3.16)$$

<u>Теорема 1</u>. Якщо на множині X з околом $\dot{O}_\delta(a)$ дано функції $f(x)$ і $g(x)$, які мають скінчені границі A та B, то функції $f(x)\pm g(x)$ також мають скінчені границі, причому

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = A\pm B. \qquad (3.17)$$

<u>Доведення</u>. Нехай в околі $\dot{O}_\delta(a)$ $f(x) = A + \alpha(x)$ і $g(x) = B + \beta(x)$, де $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі. Тоді $f(x)\pm g(x) = A\pm B + \left[\alpha(x)\pm\beta(x)\right]$. Користуючись лемою 2 (з попереднього пункту), дістаємо $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = A\pm B$. Тут враховано ще наслідок з леми 1.

<u>Теорема 2</u>. За умови теореми 1 маємо, що добуток $f(x)g(x)$ також має границю, причому

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = AB. \qquad (3.18)$$

<u>Доведення</u>. Як і у доведенні теореми 1 маємо

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[A+\alpha(x)\right]\left[B+\beta(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)\right] = AB,$$

використовуючи леми 1, 2, 3 та їх наслідки.

<u>Наслідок 1</u>. $\lim\limits_{x\to a}\left[cf(x)\right] = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де c – стала. Тобто сталу можна виносити за знак границі.

<u>Наслідок 2</u>. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = A^n$.

<u>Теорема 3</u>. За умови теореми 1 (якщо $B\neq 0$), випливає, що частка $\frac{f(x)}{g(x)}$ також має скінчену границю, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B} \tag{3.19}$$

Доведення. Нехай $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Тоді $f(x)=\varphi(x)g(x)$ і за теоремою 2 здобудемо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)$. Звідси $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Приклад. Знайти границю функції $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$, коли $x\to 2$. Розглянемо $f(x)=x^2+3x-4$ і $g(x)=x+4$, тому $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Застосовуючи теореми 1 і 2, матимемо

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x-4\right)=2^2+3\cdot 2-4=6;$$

$$\lim_{x\to 2}\varphi(x)=\lim_{x\to 2}(x+4)=2+4=6.$$

І, отже, за теоремою 3 дістаємо:

$$\lim_{x\to 2}y=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{6}{6}=1.$$

Теорема 4. Якщо для функцій $f(x)$, $g(x)$ і $h(x)$ в околі $\dot{O}_\delta(a)$ справджуються нерівності:

$$f(x)\le g(x)\le h(x),$$

$$\text{і } \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=A\text{, то } \lim_{x\to a}g(x)=A.$$

Доведення. За умови теореми маємо:

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,\ \left|h(x)-A\right|<\varepsilon,\ f(x)\le g(x)\le h(x).$$

Тоді, $f(x)-A\le g(x)-A\le h(x)-A$,

$$\left|f(x)-A\right|\le\left|g(x)-A\right|\le\left|h(x)-A\right|.$$

Остання нерівність означає, що $\left|g(x)-A\right|<\varepsilon$ і $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$.

3.5 Розкриття невизначеностей

Доведені теореми допомагають обчислити різні границі, не звертаючись кожного разу до "$\varepsilon-\delta$" мови. Однак, може статися так, що при застосуванні першої теореми дістанемо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Виникає питання, чому дорівнює $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]$? Так само застосування теореми 3 приводить до питання, чому дорівнює $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$? Далі, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, то чому дорівнює $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$? При застосуванні теореми 3 може виникнути питання, чому дорівнює

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$?

У всіх цих випадках кажуть, що маємо ***невизначеності*** типу $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Якщо невизначеність типу $[\infty-\infty]$ досить легко можна усунути, то невизначеності інших типів розкриваються за допомогою різних методів. Знаходження границь невизначеностей називається ***розкриттям невизначеностей***, яке здійснюється за допомогою додаткових перетворень.

Особливо підкреслимо, що кожний з символів $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ позбавлений всякого числового змісту і кожний з них є лише умовною характеристикою для позначення саме типу невизначеності.

Розглянемо докладніше деякі методи розкриття вказаних невизначеностей, відзначивши, що це не завжди така проста задача.

Розглянемо невизначеність типу $[\infty-\infty]$.

а) $f(x)=2x\to\infty$ і $g(x)=-x\to-\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$y=f(x)+g(x)=[\infty-\infty]=2x-x=x\to\infty$.

б) $f(x)=x\to\infty$ і $g(x)=-2x\to-\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$y=f(x)+g(x)=[\infty-\infty]=x-2x=-x\to-\infty$.

в) $f(x)=a+x\to\infty$ і $g(x)=-x\to-\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$y=f(x)+g(x)=[\infty-\infty]=a+x-x=a\to a$.

г) $f(x)=x+\sin x\to\infty$ і $g(x)=-x\to-\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$y=f(x)+g(x)=[\infty-\infty]=x+\sin x-x=\sin x$.

Але функція $\sin x$ не має границі, коли $x\to\infty$. Таким чином, в останньому прикладі границя не існує.

Розглянемо невизначеність типу $[0\cdot\infty]$.

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\to 0$ і $g(x)=x\to\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$y=f(x)g(x)=[0\cdot\infty]=\dfrac{1}{x^2}x=\dfrac{1}{x}\to 0$.

б) $f(x)=\dfrac{1}{x}\to 0$ і $g(x)=x^2\to\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$y=f(x)g(x)=[0\cdot\infty]=\dfrac{1}{x}x^2=x\to\infty$.

в) $f(x)=\dfrac{a}{x}\to 0$ ($a\neq 0$) і $g(x)=x\to\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$y=f(x)g(x)=[0\cdot\infty]=\dfrac{a}{x}x=a\to a$.

г) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\to 0$ і $g(x)=x\to\infty$, коли $x\to\infty$, Тоді

$y=f(x)g(x)=[0\cdot\infty]=\dfrac{\sin x}{x}x=\sin x$ – границі немає.

Розглянемо невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

а) $f(x)=x\to\infty$ і $g(x)=x^2\to\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}\to 0.$$

б) $f(x)=x^2\to\infty$ і $g(x)=x\to\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{x^2}{x}=x\to\infty.$$

в) $f(x)=ax\to\infty$ ($a\neq 0$) і $g(x)=x\to\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{ax}{x}=a\to a$$

г) $f(x)=[2+\sin x]x\to\infty$ і $g(x)=x\to\infty$, коли $x\to\infty$. Тоді

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{(2+\sin x)x}{x}=2+\sin x$$ – границя не існує.

Розглянемо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Легко побачити, що розкриття невизначеності в цьому випадку зводиться до розкриття невизначеності типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Дійсно, якщо $f(x)\to\infty$ і $g(x)\to\infty$, то $f(x)$ та $g(x)$ є нескінченно великими функціями, але тоді функції $\dfrac{1}{f(x)}$ і $\dfrac{1}{g(x)}$ є нескінченно малими. Отже, дослідження випадку $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ має вигляд $\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, який вже вивчено.

З точки зору теорем про границі дуже суттєвим виявляється поняття еквівалентно малих функцій для розкриття невизначеностей виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ (а також $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ і $[0\cdot\infty]$). Дійсно, нехай маємо дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$, $\beta(x)$ і нехай вони еквівалентні: $\alpha(x)\sim\beta(x)$. Це означає, що при достатньо малих значеннях $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ можна з будь-якою великою точністю вважати, що $\alpha(x)=\beta(x)$, тобто замінити складну нескінченно малу на еквівалентну їй просту нескінченно малу.

Приклад. Нехай $\alpha(x)=x^3\sqrt{\cos 5x}\to 0$ і $\beta(x)=x^3\to 0$ при $x\to 0$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sqrt{\cos 5x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 5x}=1,$$

тобто $\alpha(x)\sim\beta(x)$. Значить при достатньо малих значеннях x можна записати, що $x^3\sqrt{\cos 5x}=x^3$.

В багатьох випадках розкриття невизначеностей вимагає певних зусиль і майстерності, якої можна досягти лише шляхом вправ.

Звернемо увагу, що всі вказані невизначеності розкриваються за допомогою алгебраїчних або тригонометричних перетворень, або застосуванням еквівалентних нескінченно малих.

Приклад. Розглянемо границю функції $y=(x+1)^a-x^a$, де $0<a<1$ при $x\to\infty$. Маємо невизначеність $[\infty-\infty]$. Але

$$y=(x+1)^a-x^a=x^a\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^a-1\right]<x^a\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]=x^a\frac{1}{x}=\frac{1}{x^{1-a}}\to 0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$.

Приклад. Розглянемо границю функції $y=\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ при $x\to\infty$. Дістаємо $\sqrt{x}\to\infty$ і $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\to 0$ (див. попередній приклад при $a=\frac{1}{2}$) і маємо невизначеність $[0\cdot\infty]$. Але

$$y=\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(x+1-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Оскільки $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\to\infty$, то дійшли до невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Далі

$$y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\to\frac{1}{2},$$

оскільки $\frac{1}{x}\to\infty$.

Надалі ми ще повернемося до питання розкриття невизначеностей і розглянемо деякі корисні методи з застосуванням диференціального числення.

При обчисленні границь функцій виду $\left[f(x)\right]^{g(x)}$ можуть виникнути невизначеності типу $\left[1^\infty\right]$, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$. Для вирішення питання про границю $\left[f(x)\right]^{g(x)}$ мало знати лише границі функцій $f(x)$ і $g(x)$, а треба також враховувати закони, за якими вони прямують до своїх границь.

3.6 Перша знаменна границя

Доведемо, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{3.20}$$

Відомо, що $\sin x=0$ при $x=0$. Таким чином, вираз $\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ дає невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, коли $x\to 0$. Доведення почнемо з деяких корисних нерівностей (рис. 3.2):

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.21}$$

Розглянемо коло радіуса R, $OA=OC=R$ і гострий кут $\angle AOC=x$. AC – хорда, AB – дотична до кола у точці A. Маємо очевидні нерівності $S_{\Delta AOC}<S_{сектAOC}<S_{\Delta AOB}$.

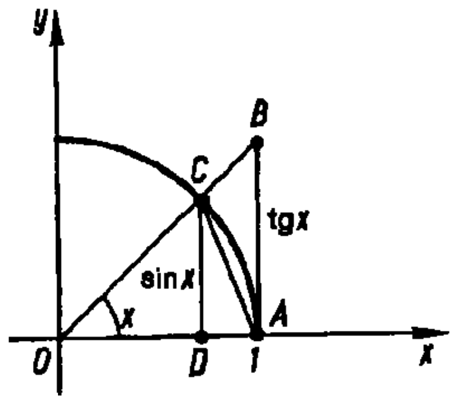

Рис. 3.2 – Коло радіуса R і прямокутний трикутник ΔOAB

Площа трикутника ΔAOC дорівнює $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot h$, де висота $h = R\sin x$ і, отже, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} R^2 \sin x$. Довжина дуги AC дорівнює Rx (це відомо з елементарної геометрії), тому площа сектора AOC дорівнює $S_{сектAOC} = \frac{1}{2} R \cdot Rx = \frac{1}{2} R^2 x$. Площа трикутника ΔAOB: $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot AB$ і $OA = R$, $AB = R\,\mathrm{tg}\,x$. Таким чином, $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R^2\,\mathrm{tg}\,x$. Підставляючи значення площ у нерівність для площ і скорочуючи на $\frac{R^2}{2}$, доведемо нерівність (3.21).

Оскільки $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ і $\sin x > 0$, то поділимо нерівність (3.21) на $\sin x$ і здобудемо:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ і $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, то, пригадуючи теорему 4 про границі, можемо зробити висновок , що $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Таким чином, рівність (3.20) є вірною.

Границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ називають ***першою знаменною границею***.

За допомогою першої знаменної границі можна обчислити багато інших границь.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$, тобто є невизначеність. Але

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

3.7 Друга знаменна границя

Розглянемо функцію $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, обчислимо її границю і встановимо, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad (3.22)$$

де $e = 2,718281828459045...$ – трансцендентне число (основа натуральних логарифмів, Л. Ейлер (1707-1783)).

Але спочатку доведемо одну достатню ознаку існування границі.

Теорема (про границю монотонної функції). Якщо функція $f(x)$ монотонно зростає в області X, має в ній граничну точку a: $a > x\ \forall x \in X$ і обмежена зверху $f(x) \le M\ \ \forall x \in X$, то при $x \to a$ функція $f(x)$ має скінчену границю.

Доведення. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконано нерівність $f(x) \le M < M + \varepsilon$. З іншого боку, $\forall x' < a\ \ f(x') > M - \varepsilon$. А у зв'язку з монотонним зростанням $f(x)$ маємо $\forall x > x'$ нерівність $f(x) > M - \varepsilon$. Таким чином, $M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon$, що якраз і означає існування границі $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$.

Для спрощення доведення (3.22) розглянемо значення $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ для $x \in N$, тобто числову послідовність

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Перш за все покажемо, що ця послідовність зростає, для чого використаємо формулу бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + ... + b^n.$$

Якщо $a = 1$ і $b = \frac{1}{n}$, то

$$y_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...(n-2)(n-1)n}\frac{1}{n^n}.$$

Врахуємо, що

$$\frac{n(n-1)}{n^2} = 1-\frac{1}{n};\ \ \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right);\ ...$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-n+1)}{n^n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Тоді

$$y_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...(n-1)n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Якщо збільшувати число n, то дробі $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$, ... зменшуються, а внаслідок цього збільшуються множники $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{m}\right)$, $\left(1-\frac{3}{n}\right)$, ... Крім того, виникають нові доданки. Отже послідовність y_n зростає, коли n зростає.

Тепер покажемо, що послідовність y_n обмежена зверху. Дійсно, якщо відкинути всі множники у круглих дужках, то дістанемо нерівність:

$$y_n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Вираз у круглих дужках є сумою геометричної прогресії з першим членом $a=1$ і знаменником $q=\frac{1}{2}$, котра дорівнює

$$\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

В результаті дістанемо

$$y_n < 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

Звідси, за доведеною вище теоремою, випливає, що послідовність y_n має скінчену границю, яку за прикладом Л. Ейлера позначають літерою e, тому

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

А тепер доведемо (3.22). Нехай $n < x < n+1$. Тоді

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Врахуємо, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\cdot 1 = e.$$

Згадуючи теорему 4 про границю, дістаємо (3.22). Границя (3.22) називається другою знаменною границею.

Користуючись тим, що коли $\alpha(x)$ є нескінченно малою, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика, формулі (3.22) можна надати іншу форму. Нехай $x=\frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{x}\to 0$, коли $x\to\infty$. У результаті маємо

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \qquad (3.23)$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

Отже, знайдено границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ і $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, котрі поєднує одна властивість:

кожна з функцій $y=\frac{\sin x}{x}$ і $y=\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$ не визначена у точці $x=0$. Але це ніяк не заважає говорити про їхні границі при $x\to 0$, бо згідно з тонким змістом поняття границі якраз точка $x=0$ при цьому не розглядається.

3.8 Неперервність функції в точці і на інтервалі

З розглянутим поняттям границі тісно пов'язане інше важливе поняття – поняття неперервності функції, яке лежить в основі всього математичного аналізу. Можна сказати, що математичний аналіз є аналізом неперервностей.

Розглянемо функцію $f\left(x\right)$, визначену в деякій області $X=\left\{x\right\}$, для якої x_0 є граничною точкою, $x_0\in X$, отже, в цій точці функція $f\left(x\right)$ має визначене значення $f\left(x_0\right)$.

Коли вивчалася границя $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$, то неодноразово підкреслювалося, що $x\neq x_0$, а якщо навіть x й набуває значення x_0, то для знаходження границі ніяк не враховується значення $f\left(x_0\right)$.

Функція $f\left(x\right)$ називається ***неперервною в точці*** $x=x_0$, якщо виконується рівність

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right). \tag{3.24}$$

У цьому випадку кажуть, що точка x_0 є ***точкою неперервності функції*** $f\left(x\right)$. Якщо ж (3.24) порушується, то кажуть, що в цій точці функція $f\left(x\right)$ має ***розрив***, а сама точка x_0 зветься ***точкою розриву***.

Розкриємо вираз (3.24) "$\varepsilon-\delta$" мовою. Тоді зміст неперервності зводиться до наступного. Функція $f\left(x\right)$ неперервна в точці x_0, якщо

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon. \tag{3.25}$$

Нехай $x_0\notin X$ і функція $f\left(x\right)$ визначена $\forall x\in X$, крім точки x_0. Однак, якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$, то доповнивши значення $f\left(x\right)$ значенням границі $f\left(x\right)$ в точці x_0, дістанемо, що функція $f\left(x\right)$ буде неперервною в цій точці.

При обчисленні границі (3.24) можна наближати значення x до x_0 зліва і справа від точки x_0.

Кажуть, що функція $f\left(x\right)$ неперервна в точці x_0 справа (зліва), якщо справджується граничне співвідношення

$$f\left(x_0+0\right)=\lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right) \tag{3.26}$$

(відповідно,

$$f\left(x_0-0\right)=\lim_{x\to x_0-0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)). \tag{3.27}$$

Якщо хоча б одна з цих рівностей не виконується, то функція $f\left(x\right)$ має розрив у точці x_0. Неперервність у точці x_0 рівнозначна її неперервності одночасно зліва і справа.

Функція $f\left(x\right)$ називається ***неперервною на інтервалі*** $\left[a,b\right]$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Приклад. Розглянемо функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 3, \\ 3-x, & x>3. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Ця функція визначена $\forall x\in(-\infty,\infty)$. Її значення $f(x=3)=0$. Однак, у точці $x=3$ вона має розрив. Дійсно,

$$f(x=3-0)=\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0} x=3,$$

$$f(x=3+0)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}(3-x)=0.$$

І хоча $f(x=3)=f(x=3-0)=0$, функція $f(x)$ має розрив у точці $x=3$, оскільки $f(x=3+0)\ne f(x=3)$.

Розглянемо властивості функцій, що неперервні в точці і сформулюємо їх у вигляді теорем.

<u>Теорема 1</u>. Якщо дві функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені $\forall x\in X$ і обидві неперервні в точці $x_0\in X$, то в цій же точці неперервні також функції:

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)},$$

остання за умови, що $g(x_0)\ne 0$.

<u>Доведення</u>. Це твердження безпосередньо випливає з теорем про границю суми (різниці), добутку і частки двох функцій, з яких кожна має границю.

<u>Теорема 2</u> (про неперервність складеної функції). Нехай функція $\varphi(y)$ визначена $\forall y\in Y$, а функція $f(x)$ визначена $\forall x\in X$, причому $f(x)\in Y$, коли $x\in X$. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці $x_0\in X$, а функція $\varphi(y)$ неперервна у відповідній точці $y_0=f(x_0)\in Y$, то складена функція $\varphi(f(x))$ неперервна в точці x_0.

<u>Доведення</u>. Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=y_0$, тобто з $x\to x_0$ випливає, що $y\to y_0$. Але функція $\varphi(y)$ неперервна в точці y_0 і, отже,

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(f(x))=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)=\varphi(f(x_0)).$$

Розглянемо основні властивості функцій неперервних на замкненому інтервалі $[a,b]$, які сформулюємо у вигляді теорем без доведення.

<u>Перша теорема Больцано-Коші</u>. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна $\forall x\in[a,b]$ і на його кінцях набуває протилежних за знаком значень. Тоді між a і b знайдеться точка c, для якої $f(c)=0$, $a<c<b$.

Ця теорема має простий геометричний зміст: якщо функція $f(x)$ неперервна та її графік переходить з однієї півплощини, обмеженої віссю OX, на іншу, то він обов'язково перетинає цю вісь.

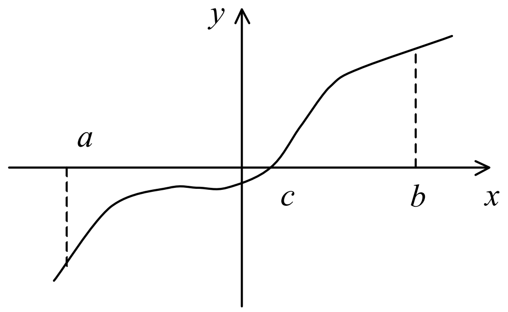

Рис. 3.3 – Перша теорема Больцано-Коші

Друга теорема Больцано-Коші. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна $\forall x \in [a,b]$ (на скінченому чи нескінченому інтервалі) і $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тоді для будь-якого числа C, такого, що $A < C < B$, знайдеться така точка c: $a < c < b$, що $f(c) = C$.

Геометричний зміст зрозумілий з рисунку 3.4. Очевидно, що перша теорема Больцано-Коші є частковим випадком другої теореми Больцано-Коші. Можна сказати, що значення неперервної функції $f(x)$ суцільно, без прогалин заповнюють інтервал $[A,B]$.

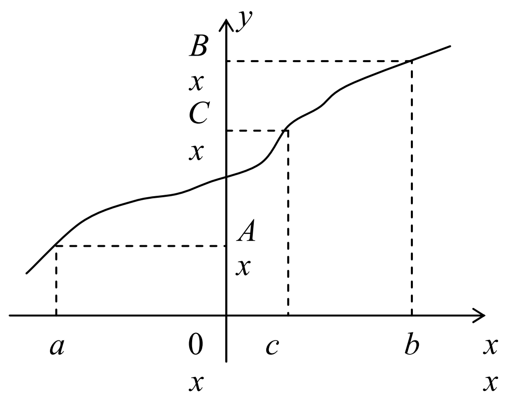

Рис. 3.4 – Друга теорема Больцано-Коші

Перша теорема Вейєрштрасса (теорема про обмеженість функції). Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна $\forall x \in [a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку, тобто існують такі сталі скінчені числа m і M, що $m \le f(x) \le M$.

Підкреслимо, що тут суттєво, що інтервал $[a,b]$ замкнений. Якщо інтервал відкритий, то теорема не справджується.

Приклад. Функція $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$, набуває лише скінчених значень, але вона не обмежена зверху тому, що коли $x \to 0$, вона може набувати яких завгодно великих значень.

Друга теорема Вейєрштрасса. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкненому інтервалі $[a,b]$, то вона досягає на ньому своєї точної верхньої та точної нижньої межі (свого найбільшого та найменшого значення).

Приклад. Функція $y = 2x$, $x \in [0,1)$, обмежена на інтервалі, але свого найбільшого значення на ньому вона не досягає, оскільки при $x \to 1$ функція набуває значень скільки завгодно близьких до 2, але ніколи не набуває 2. Це пов'язано з тим, що на $\left[0,1\right)$ немає точки, в якій значення функції $f\left(x\right)$ дорівнювало 2.

3.9 Точки розриву функції, їх класифікація

Оскільки функція , взагалі кажучи, може мати розриви у деяких точках, то розглянемо типи можливих розривів.

Якщо функція $f\left(x\right)$ має границю у точці x_0, але $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ або ж функція $f(x)$ у точці x_0 не визначена, то точка x_0 називається ***точкою усувного розриву***. Це означає, що функція $f\left(x\right)$ стає неперервною в точці x_0, якщо її значення в цій точці перевизначити і дорівняти $f\left(x_0\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$.

Якщо функція $f\left(x\right)$ має ліву та праву границі у точці x_0, але вони не співпадають $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду***.

Якщо не існує ліва або права границі в точці x_0, тоді точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду***.

Якщо границя функції у точці x_0 дорівнює нескінченності $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то точка x_0 називається ***точкою розриву типа полюс***.

Приклад. Нехай дано функцію:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} -1, \, x < 0, \\ 0, \, x = 0, \\ 1, \, x > 0. \end{cases}$$

В цьому випадку $f\left(0+0\right) = 1$, $f\left(0-0\right) = -1$, $f\left(0\right) = 0$. Оскільки $f\left(0+0\right) \neq f\left(0-0\right)$, то маємо розрив першого роду (рис. 3.5).

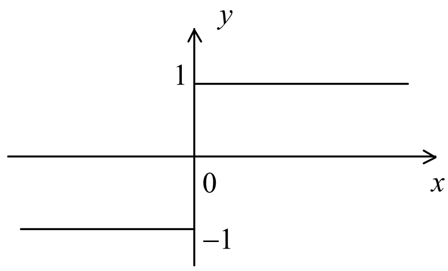

Рис. 3.5 – Розрив першого роду

Приклад. Розглянемо функцію:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x, \, x < 0, \\ 1, \, x = 0, \\ x^2, \, x > 0. \end{cases}$$

Маємо $f\left(0+0\right) = f\left(0-0\right) = 0$, $f\left(0\right) = 1$. Це усувний розрив, який можна усунути, надавши $f\left(x = 0\right) = 0$.

Приклад. Розглянемо функцію $f\left(x\right) = \dfrac{\sin x}{x}$. Значення функції $f\left(0\right)$ не визначено (його не існує, оскільки ділити на нуль не можна). Але існують границі $f\left(0+0\right) = f\left(0-0\right) = 1$ (перша знаменна границя). Таким чином, можна довизначити функцію $f\left(x\right)$ в точці $x = 0$, надавши $f\left(0\right) = 1$, відновлюючи її неперервність.

Приклад. Для функції $f(x)=\frac{1}{x}$ маємо $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$. Це означає, що точка $x=0$ є розривом типу полюс.

Приклад. Для функції $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не існує границі при $x\to 0$. Таким чином, $x=0$ є точкою розриву другого роду.

Приклад. Знаменна функція Л. Діріхлє (1805-1859):

$$\chi(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\notin Q\end{cases}.$$

Ця функція визначена у будь-якій точці $x\in(-\infty,\infty)$ і дорівнює одиниці, якщо x – раціональне число ($x\in Q$), і дорівнює нулю, якщо x – ірраціональне число ($x\notin Q$). Така функція розривна у кожній точці області визначення. Дійсно, оскільки у будь-якому околі (яким би мали він не був) раціональної точки знайдуться ірраціональні і навпаки, то хоча б яке було $x_0\in(-\infty,\infty)$, границі функції $\chi(x)$ при $x\to x_0$ не існує. Таким чином, $\forall x_0\in(-\infty,\infty)$ маємо розрив другого роду.

Контрольні запитання і задачі до розділу 3

1. Дайте визначення границі числової послідовності.
2. Дайте визначення границі функції неперервного аргументу.
3. Сформулювати основні теореми про границі.
4. Яка функція називається нескінченно малою? Нескінченно великою?
5. Сформулювати теореми про нескінченно малі функції.
6. Розкриття невизначеностей при обчисленні границь.
7. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$.
8. Які функції називаються еквівалентними?
9. Наведіть першу чудову границю.
10. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$.
11. Наведіть другу знаменну границю
12. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-1}$.
13. Дайте визначення неперервності функції в точці й на інтервалі.
14. Властивості функцій, неперервних на інтервалі.
15. Що таке точка розриву функції? Які види точок розриву Вам відомі?

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1 Поняття похідної, основні формули та правила диференціювання

Приростом аргументу x в точці x_0 називається різниця $x-x_0$, яка позначається через $\Delta x = x - x_0$. ***Приростом функції*** $f(x)$ в точці x_0 називається різниця $f(x)-f(x_0)$, яка позначається $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$.

Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то ця границя називається ***похідною*** функції $f(x)$ у точці x_0 і позначається $f'(x)$.

У тому випадку, коли границя не існує, функція в точці x_0 похідної не має.

Приклад. Дано функцію $f(x)=x^2$. Для будь-якої точки x_0:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\left(x_0+\Delta x\right)^2-x_0^2}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x .$$

Похідна функції $f(x)=x^2$ для будь-якого $x_0\in R$ дорівнює $2x_0$, тому що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2x_0+\Delta x\right)=2x_0$.

Приклад. Дано функцію $f(x)=|x|$. Для будь-якої $x_0\neq 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

Коли $x=0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$ – не існує.

Тут існують лише ліва та права границі. Це означає, що функція $f(x)=|x|$ не має похідної в точці 0.

Якщо існує скінчена ліва границя $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то ця границя називається ***лівою похідною*** функції $f(x)$ і позначається $f_-'(x_0)$ або $f'(x_0-0)$.

Якщо існує скінчена права границя $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то ця границя називається ***правою похідною*** функції $f(x)$ і позначається $f_+'(x_0)$ або $f'(x_0+0)$.

Отже, для другого прикладу у точці 0 існують ліва та права похідні, а похідна не існує. Для того, щоб похідна існувала, необхідно, щоб ліва та права похідні дорівнювали одна одній.

<u>Теорема</u> (про похідну від складеної функції). Нехай функція $f(x)$, визначена на множині A, має похідну $f'(x_0)$ в точці $x_0\in A$. Функція $g(y)$ визначена на множині B, причому $f(x)\in B$ для будь-якого $x\in A$. Якщо $g(y)$ має похідну $g'(y_0)$ у точці $y_0=f(x_0)$, то і складена функція $g\left(f(x)\right)$ має похідну в точці x_0: $\left(g\left(f(x_0)\right)\right)'=g'\left(f(x_0)\right)f'\left(x_0\right)$.

Таким чином, якщо знайти похідні основних елементарних функцій, як ми це зробили із прикладом $f(x)=x^2$, то, користуючись правилом диференціювання складеної функції, можемо знайти похідну будь-якої функції, яка є комбінацією основних елементарних функцій. Необхідно запам'ятати наступну таблицю похідних.

В цій таблиці після кожної похідної ще стоїть u', тобто враховано той факт, що u може бути функцією від x.

Таблиця 4.1 – Таблиця похідних

y	y'	y	y'
u^{α}	$\alpha u^{\alpha-1}u'$	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
α^{u}	$\alpha^{u}\ln\alpha\cdot u'$	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
e^{u}	$e^{u}\cdot u'$	$\mathrm{arctg}\, u$	$\frac{1}{1+u^2}u'$
$\log_{\alpha} u$	$\frac{1}{u\ln\alpha}u'$	$\mathrm{arcctg}\, u$	$-\frac{1}{1+u^2}u'$
$\ln u$	$\frac{1}{u}u'$	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}u'$
$\sin u$	$\cos u\cdot u'$	$u\pm v$	$u'\pm v'$
$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$	$u\cdot v$	$u'\cdot v+u\cdot v'$
$\mathrm{tg}\, u$	$\frac{1}{\cos^2 u}u'$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
$\mathrm{ctg}\, u$	$-\frac{1}{\sin^2 u}u'$		

Приклад. Дано функцію $\sqrt{\sin x}$. Тут $g(y)=\sqrt{y}$, $f(x)=\sin x$.

Використовуючи правило диференціювання складної функції, отримуємо:

$$\left(\sqrt{\sin x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\left(\sin x\right)'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Рівняння дотичної до функції $f(x)$ у точці x_0: $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0$. Геометрично похідна дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної.

4.2 Диференціал

Функція $f(x)$ називається ***диференційованою*** в точці x_0, якщо її приріст у цій точці може бути представлений у вигляді:

$\Delta f=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$,

де A – константа,

$\alpha(x)$ – нескінченно мала функція щодо Δx.

Тобто приріст диференційованої функції можна подати у вигляді двох доданків, перший доданок $A\Delta x$ називають ***головною частиною приросту***.

Диференціалом функції $f(x)$ в точці x_0 називається головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту аргументу. Диференціал функції позначається символом df. $df(x_0)=A\Delta x$

Теорема. Диференціал функції $f(x)$ в точці x_0 існує і визначається однозначно тоді і тільки тоді, коли існує похідна $f'(x_0)$. В цьому випадку диференціал має вигляд: $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$.

Із теореми випливає, що поняття функції, диференційованої в точці, і функції, що має похідну, еквівалентні.

Розглянемо диференціал функції $f(x)=x$: $df=dx=x'\Delta x=\Delta x$. Отже, диференціал незалежної змінної дорівнює приросту цієї змінної і $df(x)=f'(x)dx$, або

$$f'(x)=\frac{df}{dx}.$$

Оскільки диференціал є добутком похідної на диференціал незалежної змінної, то щодо нього вірні такі ж самі правила, як і для похідних (сума, різність та ін.).

Функцію $y(x)$ називають ***параметрично заданою***, якщо вона подана у вигляді

$$\begin{cases} y=f(t) \\ x=g(t) \end{cases},\quad t\in E,$$

де хоча б одна із цих функцій взаємно однозначно відображає множину E.

Наприклад,

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\cos t \end{cases},\quad t\in[0;2\pi] \tag{4.1}$$

задає еліпс.

В деяких випадках можна розв'язати одне з рівнянь відносно t і перейти до звичайного задання функції. Але в деяких випадках це може бути неможливим. Але навіть і в цьому випадку можна знайти похідну.

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)dt}{f'(t)dt}=\frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Ця функція теж виявляється заданою параметрично.

Приклад. Для еліпса (4.1) похідна дорівнює:

$$y'_x=\frac{-a\sin t}{b\cos t}=-\frac{a}{b}\operatorname{tg} t.$$

Кажуть, що функція $y(x)$ ***задана неявно***, якщо вона подана у вигляді рівняння, що не розв'язано відносно y.

Приклад. Дано функцію $x^3+y^3-3xy=0$.

Диференціюємо цю рівність:

$$3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0.$$

Тепер, розв'язуючи це рівняння, дістанемо: $y'=\dfrac{3y-3x^2}{3y^2-3x}$:

У деяких випадках буває зручним застосувати так зване ***логарифмічне диференціювання***. Нехай необхідно продиференціювати функцію: $y=x^{x^2}$. Спочатку знаходимо логарифм цієї функції:

$$\ln y(x) = x^2 \ln x .$$

Тепер диференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2x \ln x + x ,$$

$$y'(x) = x^{x^2} (2x \ln x + x) .$$

Таким методом диференціювання зручно користатися у випадку степеневих функцій.

Одним із застосувань диференціалу є проведення наближених обчислень з його допомогою. Як було показано раніше, приріст функції в точці x_0 є

$$\Delta f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\Delta x + \alpha\left(\Delta x\right).$$

Оскільки $\alpha\left(\Delta x\right)$ – н. м. ф., то при достатньо малих значеннях Δx можна записати:

$$\Delta f(x_0) \approx f'\left(x_0\right)\Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right)\Delta x$$

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x$$

Остання наближена рівність може бути застосовувана для наближеного обчислення функцій.

Приклад. Необхідно знайти наближене значення $\sqrt{4,5}$.

Спочатку знаходимо похідну функції $\sqrt{x}$: $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Тоді

$$\sqrt{4,5} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} 0,5 = 2 + \frac{0,5}{4} = 2,125 .$$

Для порівняння можна зазначити, що більш точним значенням є 2,121.

Похідною другого порядку називають похідну від похідної першого порядку:

$$f''\left(x\right) = \left(f'\left(x_0\right)\right)' .$$

Аналогічно вводять поняття похідної порядку n :

$$f^{(n)}\left(x\right) = \left(f^{(n-1)}\left(x\right)\right)' .$$

Так само поступають і з диференціалами вищих порядків. Диференціал другого порядку $d^2 f = d\left(df\right) = d\left(f'\left(x\right)dx\right) = f''\left(x\right)dxdx = f''\left(x\right)dx^2$, або ж

$$f''\left(x\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Для диференціалів порядку n

$$f^{(n)}\left(x\right) = \frac{d^n f}{dx^n} .$$

4.3 Основні теореми диференціального числення

Значення похідної $f'\left(x\right)$ деякої функції дозволяє зробити висновки й про поведінку самої функції. Отже, похідні надають потужний математичний апарат, який дозволяє значно поширити клас функцій, що вивчаються. До основних теорем диференціального числення відносяться теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші. Вони пов'язують локальні властивості функції з її властивостями на скінченому інтервалі.

Нагадаємо, що функція $y = f(x)$ зветься зростаючою (спадною), якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає $f(x_2) > f(x_1)$ (або $f(x_2) < f(x_1)$).

Спочатку доведемо просту лему про необхідну умову зростання (спадання) функції.

Лема. Нехай функція $f(x)$ має скінчену похідну в точці x_0. Якщо $f'(x_0) > 0$ (або $f'(x_0) < 0$), то для значень x, достатньо близьких до x_0 справа, справджується нерівність $f(x) > f(x_0)$ (або $f(x) < f(x_0)$), а для значень x, достатньо близьких до x_0 зліва, буде $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$). Інакше, при $f'(x) > 0$ функція $f(x)$ зростає поблизу точки x_0, а при $f'(x) < 0$ – спадає.

Доведення. За визначенням похідної маємо

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Якщо $f'(x_0) > 0$, то знайдеться такий окіл $O_\delta(x_0)$, в якому (при $x \neq x_0$) матимемо

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0. \qquad (4.2)$$

Нехай спочатку $x_0 < x < x_0 + \delta$, тобто x лежить справа від x_0. Тоді з (4.2) випливає, що $f(x) > f(x_0)$. Якщо ж $x_0 - \delta < x < x_0$, тобто точка x лежить зліва від x_0, то $x - x_0 < 0$. Тоді очевидно, що $f(x) < f(x_0)$. Отже, у цьому разі функція $f(x)$ зростає. Так само доводиться лема для спадної функції.

А тепер розглянемо теорему Ферма (П. Ферма, 1601-1665, – французький математик).

Теорема Ферма. Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі (a,b) й у внутрішній точці c ($a < c < b$) цього інтервалу набуває свого найбільшого або найменшого значення. Якщо існує скінчена похідна $f'(c)$, то з необхідністю $f'(c) = 0$.

Доведення. Нехай для визначеності $f(c) = \max f(x)$. Припущення $f'(c) \neq 0$ веде до суперечності: або $f'(c) > 0$ і тоді за лемою $f(x) > f(c)$, якщо $x > c$; або $f'(c) < 0$ і тоді знову таки за лемою $f(x) > f(c)$, якщо $x < c$. В обох випадках $f(c)$ не є найбільшим значенням, що суперечить умовам теореми і цим доводить її.

Відмітимо, що тут суттєво, що точка c лежить якраз у середині інтервалу (a,b).

Згадуючи геометричний зміст похідної $y' = f'(x)$ як кутового коефіцієнта дотичної до кривої функції $y = f(x)$, зрозуміло, що перетворення $f'(c)$ на нуль геометрично означає, що в точці c цієї кривої дотична паралельна осі Ox.

Теорема Ролля (М. Ролля, 1652-1719, – французький математик). Нехай:

Функція $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$.

Існує скінчена похідна $f'(x)$ принаймні на (a,b).

$$f(a) = f(b).$$

Тоді існує точка $c \in (a,b)$ така, що $f'(c)=0$.

Доведення. За умовами теореми функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, і тому за другою теоремою Вейєрштрасса вона досягає на цьому інтервалі свого найбільшого M і найменшого m значень. Тут можливі два випадки. Нехай $M=m$, тоді $f(x)$ зберігає своє стале значення на $[a,b]$. Дійсно, з нерівності $m \le f(x) \le M$ випливає, що $f(x)=M \quad \forall x \in [a,b]$. Тому $f'(x)=0 \quad \forall x \in [a,b]$ і за точку c можна взяти будь-яку точку з $[a,b]$. Нехай $M>m$. Цих обох значень функція $f(x)$ досягає на $[a,b]$. Але $f(a)=f(b)$, і тому хоча б одне зі значень (M або m) досягається у внутрішній точці $c \in (a,b)$. Отже, за теоремою Ферма дістаємо, що $f'(c)=0$.

Геометричний зміст теореми Ролля наступний. Якщо крайні ординати кривої функції $y=f(x)$ дорівнюють одна одній, то на кривій $y=f(x)$ знайдеться принаймні одна точка, в якій дотична паралельна осі Ox.

Звернемось до безпосередніх наслідків теореми Ролля і виведемо корисну формулу Лагранжа (Ж.Л. Лагранж, 1736-1813, – французький математик).

Теорема Лагранжа.

Нехай:

Функція $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$.

Існує скінчена похідна $f'(x)$ принаймні на (a,b).

Тоді існує точка $c \in (a,b)$ така, що справджується рівність:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{4.3}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Ця функція задовольняє всі три умови теореми Ролля, тому можна стверджувати існування такої точки $c \in (a,b)$, що $F'(c)=0$. Таким чином,

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Доведену теорему називають також *теоремою про середнє значення*. Очевидно, теорема Ролля є частковим випадком теореми Лагранжа при $f(a)=f(b)$. Звертаючись до геометричного змісту теореми, відмітимо, що $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BC}{AC}$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці c (рис. 4.1). Таким чином, твердження теореми Лагранжа рівнозначно такому: на дузі AB завжди знайдеться принаймні одна точка M, в якій дотична паралельна хорді AB.

Доведена формула (4.3) або

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

називається *формулою Лагранжа* або *формулою скінчених приростів*. До невигоди формули Лагранжа в цій формулі фігурує невизначене число c.

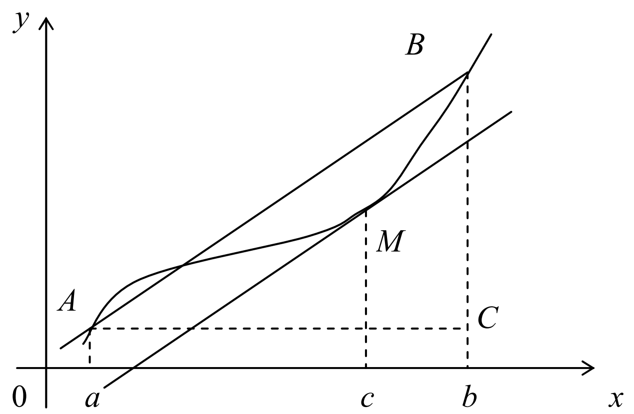

Рис. 4.1 – Теорема Лагранжа

Формулу Лагранжа можна узагальнити таким способом.

Теорема Коші. Нехай:

Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на $[a,b]$.

Існують скінчені похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ принаймні на (a,b).

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

Тоді існує така точка $c \in (a,b)$, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.4}$$

Ця формула зветься *формулою Коші*.

Доведення. З умови теореми випливає, що $g(b) \neq g(a)$, бо інакше за теоремою Ролля похідна $g'(x)$ в деякій точці дорівнювала б нулю, але це суперечить умові 3. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right].$$

Ця функція задовольняє всім умовам теореми Ролля, тому похідна $F'(x)$ існує на (a,b) і $F'(c)=0$. Відкіля негайно дістаємо формулу (4.4).

4.4 Правило Лопіталя

Доведені вище теореми знаходять широке застосування в математичному аналізі. Тут розглянемо лише одне питання, яке пов'язано з вивченими теоремами, а саме нове й дуже ефективне правило розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ і $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Результати, які подано нижче, належать переважно французькому математику Г. Лопіталю (1661-1704) і швейцарському математику І. Бернуллі (1667-1748). Висунуте ними правило звичайно зветься правилом Лопіталя.

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на $[a,b]$.

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \text{ і } \lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Існують скінчені похідні $f'(a)$ і $g'(a)$, причому $g'(a)\neq 0$.

Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}. \qquad (4.5)$$

Доведення. Існування скінчених похідних забезпечує неперервність функцій $f(x)$ і $g(x)$ в точці a. В силі умови 2 маємо $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=0$ і $g(a)=\lim_{x\to a} g(x)=0$. Але $g'(a)\neq 0$ і тому за доведеною вище лемою $g(x)\neq 0$ для значень x достатньо близьких до a, тому частка $\frac{f(x)}{g(x)}$ має зміст. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

Переходячи в цьому виразі до границі $x\to a$, дістанемо (4.5).

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 4x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=8.$$

У випадку, коли $f'(a)$ і $f'(b)$ одночасно дорівнюють нулю, можна скористатися таким узагальненням теореми 1.

Теорема 2. Нехай:

$f(x)$ і $g(x)$ визначені на відрізку $[a,b]$.

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \text{ і } \lim_{x\to a} g(x)=0.$$

На $[a,b]$ існують скінченні похідні всіх порядків до $(n-1)$ включно: $f'(x), f''(x),..., f^{(n-1)}(x)$, $g'(x), g''(x),..., g^{(n-1)}(x)$.

При $x=a$ всі ці похідні обертаються на нуль.

Існують скінчені похідні $f^{(n)}(a)$ і $g^{(n)}(a)$, причому $g^{(n)}(a)\neq 0$.

Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Без доведення.

Приклад. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

У випадку невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ теореми 1 і 2 можна перефразувати з врахуванням того, що коли $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Отже, встановлено границю частки двох функцій за припущенням, що існує границя частки похідних. Але обертати ці теореми не можна, тобто з відсутності границі частки похідних не випливає відсутність границі частки функцій.

Приклад. Існує границя

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$, але границі

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ не існує.

4.5 Монотонність і екстремуми функції

Доведена в попередньому підрозділі лема зв'язує знак похідної із зростанням або спаданням функції у точці. Тепер розглянемо функцію, яка монотонно зростає (або монотонно спадає) в широкому розумінні на деякому інтервалі.

<u>Теорема</u>. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$ й усередині інтервалу має скінчену похідну $f'(x)$. Для того, щоб $f(x)$ була на $[a,b]$ монотонно зростаючою (монотонно спадною) в широкому розумінні, необхідно і достатньо, щоб $f'(x)\ge 0$ (або $f'(x)\le 0$) на $[a,b]$.

<u>Доведення</u>. Доведемо необхідність. Якщо $f(x)$ монотонно зростає, то взявши точку $x\in[a,b]$ і надавши приріст $\Delta x>0$, матимемо

$$f(x+\Delta x)\ge f(x),\ \text{або}\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ge 0.$$

Тоді при $\Delta x\to 0$ дістаємо $f'(x)\ge 0$. Доведемо достатність. Нехай тепер $f'(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$. Візьмемо x' і x'', $x'<x''$, на $[a,b]$ і до функції $f(x)$ на $[x',x'']$ застосуємо теорему Лагранжа: $f(x'')-f(x')=f'(c)(x''-x')$, де $c\in(x',x'')$. Оскільки $f'(c)\ge 0$, то $f(x'')\ge f(x')$ і функція $f(x)$ є зростаючою. Так само доводиться теорема про спадну функцію.

Встановлений зв'язок між знаком похідної і напрямком зміни функції геометрично зрозумілий, якщо згадати, що похідна є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції. Знак цього кутового коефіцієнта вказує, чи дотична має нахил уверх чи вниз, а сукупно з тим, чи йде функція вверх, чи вниз.

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$ і не є монотонною на $[a,b]$, то знайдуться такі частини інтервалу, в яких функція досягає найбільшого та найменшого значень в деяких точках.

Функція $f(x)$ в точці x_0 має ***максимум*** (або ***мінімум***), якщо цю точку можна оточити таким околом $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$, що $\forall x\in O_\delta(x_0)$ справджується нерівність $f(x_0)\ge f(x)$ (або $f(x_0)\le f(x)$). Якщо останні нерівності здійснюються строго, то кажуть, що функція $f(x)$ має в точці x_0 ***власний максимум*** (або ***власний***

мінімум).

Для позначення максимуму або мінімуму існує термін, що поєднує їх, – ***екстремум***.

Поставимо задачу про відшукання всіх значень аргументу, які надають функції екстремум.

Припустимо спочатку, що для функції $f(x)$ на (a,b) існує скінчена похідна. Тоді, якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум, то, застосовуючи до околу $O_\delta(x_0)$ теорему Ферма, виводимо, що $f'(x_0)=0$.

Це є необхідна умова існування екстремуму. Інакше екстремум слід шукати тільки в тих точках, де $f'(x)=0$. Такі точки називатимемо ***стаціонарними*** (або ***критичними***).

Не треба думати, що кожна стаціонарна точка надає функції $f(x)$ екстремум, тобто умова $f'(x)=0$ є тільки необхідною, але не достатньою.

Приклад. Розглянемо функцію $y=x^3$. Маємо $y'=3x^2$. Похідна y' обертається на нуль, коли $x=0$. Але точка $x=0$ не є екстремальною точкою.

Зауваження. Точки, в яких не існує скінченої похідної від функції, також можуть надавати екстремум.

Приклад. Розглянемо функцію $y=\sqrt[3]{x^2}$. Ця функція має очевидний мінімум у точці $x_0=0$, але похідної $y'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ в цій точці не існує.

Отже, якщо точка x_0 є стаціонарною точкою ($f'(x_0)=0$) для $f(x)$ або якщо в цій точці не існує похідної $f'(x_0)$, то точка x_0 є, як кажуть, лише "підозрілою" на екстремум і належить до подальшого випробування.

Це випробування складається з перевірки достатніх умов, які зараз й встановимо.

Нехай в деякому околі $O_\delta(x_0)$ (принаймні $\forall x\neq x_0$) існує скінчена похідна $f'(x)$. Тоді можливі три випадки.

Нехай $f'(x)>0$ при $x<x_0$ і $f'(x)<0$ при $x>x_0$, тобто похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює свій знак з "+" на "-". В цьому разі функція $f(x)$ зростає на $(x_0-\delta,x_0)$ і спадає на $(x_0,x_0+\delta)$ (див. доведену теорему). Таким чином, значення функції $f(x_0)$ буде найбільшим в околі $O_\delta(x_0)$, тобто в точці x_0 функція має власний максимум.

Нехай $f'(x_0)<0$ при $x<x_0$ і $f'(x)>0$ при $x>x_0$, тобто $f'(x)$, переходячи через точку x_0, змінює свій знак з "-" на "+". В цьому випадку аналогічно пункту 1 пересвідчимося, що в точці x_0 функція має власний мінімум.

Нехай $f'(x)>0$, як при $x>x_0$, так і при $x<x_0$, або $f'(x)<0$ зліва і справа від x_0, тобто при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює свій знак. Тоді функція $f(x)$ або постійно зростає, або постійно спадає, і в точці x_0 немає ніякого екстремуму.

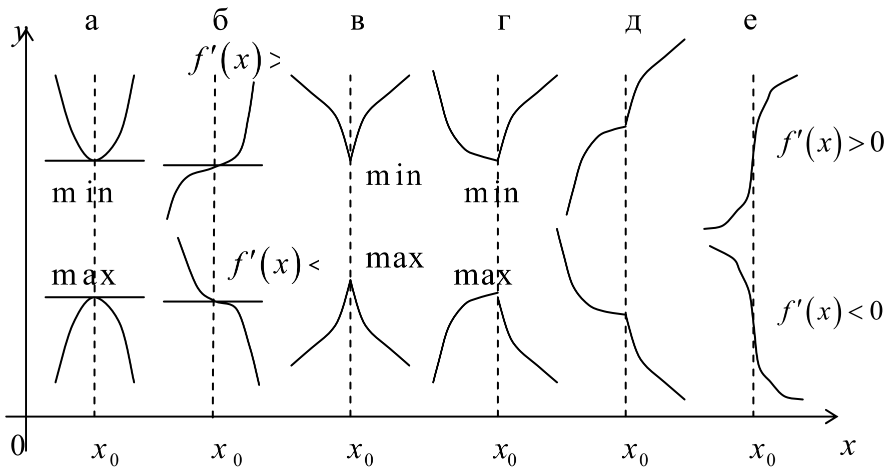

Рис. 4.2 – Можливі мінімуми та максимуми функцій

Отже, маємо *перше правило* для випробування "підозрілого" значення x_0: якщо $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з "+" на "-", то маємо максимум (рис. а, внизу), якщо змінює знак з "+" на "-", то маємо мінімум (рис. 4.2а, вверху), якщо ж знака не змінює, то екстремумів зовсім немає (рис. 4.2б). У випадку, коли в точці x_0 похідної не існує, можливі варіанти, що зображено на рис. 4.2в, 4.2г, 4.2д, 4.2е. На рис. 4.2в $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$, тобто похідної $f'(x_0)$ не існує, але похідна змінює знак, і маємо або мінімум, або максимум. На рис. 4.2г і 4.2д $f'(x_0-0)=0$, але $f'(x_0+0)\neq f'(x_0+0)$ і, отже, похідної $f'(x_0)$ не існує, але у випадку на рис. 4.2г похідна змінює свій знак, і тому має екстремум. У випадку ж, зображеному на рис. 4.2д, похідна не змінює знак і тому екстремуму немає. У випадку, зображеному на рис. 4.2е, похідна $f'(x)$ обертається в точці x_0 на $+\infty$ або $-\infty$, тобто в точці x_0 не існує взагалі. Але оскільки її знак не змінюється, то вона немає екстремуму.

Відшукання екстремумів за допомогою дослідження знаків похідної в околі "підозрілої" точки можна замінити на дослідження знаку другої похідної в цій точці. Нехай $f(x)$ має не тільки $f'(x)$ в околі $O_\delta(x_0)$, але й $f''(x)$. Оскільки x_0 – стаціонарна точка, то $f'(x_0)=0$. Якщо $f''(x_0)>0$, то за лемою про зв'язок знаку похідної з напрямком зростання або спадання функції дістаємо, що $f'(x)$ в околі $O_\delta(x_0)$ зростає, тобто поблизу точки x_0 зліва $f'(x)<f'(x_0)=0$, а справа $f'(x)>f'(x_0)=0$. Таким чином, при $f''(x_0)>0$ похідна $f'(x)$ змінює знак з "-" на "+", й отже функція $f(x)$ має в точці x_0 мінімум. Якщо $f''(x_0)<0$, то аналогічно можна довести, що функція $f(x)$ має максимум в точці x_0. Наведене вище і складає *друге правило* дослідження "підозрілих" точок.

Це правило має, взагалі кажучи, більш вузьке коло застосування. Воно явно не може бути застосовано до тих точок, де не існує скінченої похідної $f'(x)$, бо там й мови не може бути про другу похідну. Якщо $f''(x)=0$, то це правило також не дає відповіді і розв'язок питання про екстремум залежить від поведінки вищих похідних.

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на скінченому інтервалі $[a,b]$.

Поставимо питання про відшукання найбільшого й найменшого з всіх значень, яких вона набуває на $[a,b]$ й які за другою теоремою Вейєрштрасса обов'язково існують. Якщо найбільше значення досягається в точці c ($a<c<b$), то це одночасно буде одним з максимумів (очевидно, найбільшим). Але найбільшого значення $f(x)$ може досягати й на одному з кінців інтервалу. Таким чином, слід порівняти між собою значення всіх локальних максимумів $f(x)$ і її межові значення $f(a)$ і $f(b)$. Найбільше з цих значень й буде найбільшим з всіх значень $f(x)$ на $[a,b]$. Зрозуміло, що аналогічно може бути знайдено і найменше значення $f(x)$ на $[a,b]$.

4.6 Опуклість догори і донизу графіка функції. Точки перегину

Після класу монотонних функцій, зростаючих чи спадних, відокремлюють клас так званих опуклих або увігнутих функцій. Це поняття було запроваджено датським математиком І. Йєнсеном і пов'язано з опуклістю (увігнутістю) графіка функції. Надалі, щоб не виникало плутанини, будемо використовувати таку термінологію: опукла догори й опукла донизу функція (або увігнута догори й увігнута донизу).

Означення 1. Функція $f(x)$, яка визначена і неперервна на (a,b) і має на ньому скінчену похідну $f'(x)$, називається ***опуклою догори***, якщо $f'(x)$ не зростає на (a,b), й ***опуклою донизу***, якщо $f'(x)$ не спадає на (a,b) (рис. 4.3).

Це є визначення опуклості у широкому розумінні.

Функція $f(x)$ ***строго опукла догори***, якщо $f'(x)$ спадає, й ***строго опукла донизу***, якщо $f'(x)$ зростає на (a,b).

Інтервали, на яких функція $f(x)$ опукла догори або донизу, називають ***інтервалами опуклості***.

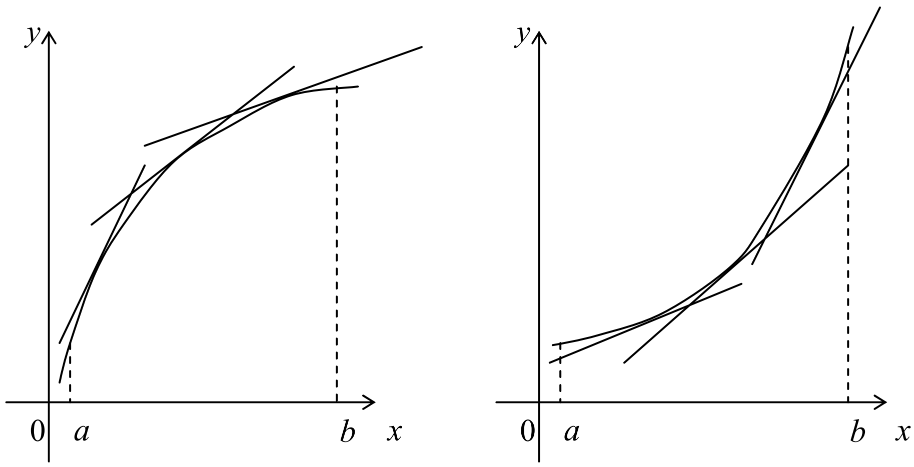

Рис. 4.3 – Опукла догори та опукла донизу функції

Означення 2. Диференційовна на (a,b) функція $f(x)$ називається опуклою догори, (або донизу), якщо графік $f(x)$ розташований нижче (або вище) кожної своєї дотичної на цьому інтервалі.

<u>Теорема</u>. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна сукупно зі своєю похідною $f'(x)$ на $[a,b]$ і має всередині його скінчену похідну $f''(x)$. Тоді, щоб функція $f(x)$ була опукла догори (в широкому розумінні), необхідно й достатньо, щоб на (a,b) була

виконана нерівність $f''(x) \le 0$. Для опуклості донизу маємо умову $f''(x) \ge 0$.

<u>Доведення</u>. Для доведення достатньо до похідної $f'(x)$ застосувати теорему з попереднього пункту, яка стверджує, що коли $f''(x) < 0$, то $f'(x)$ монотонно спадає (не зростає в широкому розумінні), і тому за означенням 1 функція $f(x)$ є опуклою догори.

Таким чином, вимога $f''(x) < 0$ (або $f''(x) > 0$) забезпечує строгу опуклість догори (донизу) .

Приклад. Нехай $y = \ln x$ і $x \in (0, \infty)$. Маємо $y' = \dfrac{1}{x}$ і $y'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Тому графік функції $y = \ln x$ є опуклим догори.

Приклад. Нехай $y = x \ln x$ і $x \in (0, \infty)$. Маємо $y' = 1 + \ln x$ і $y'' = \dfrac{1}{x} > 0$. Тому графік функції $y = x \ln x$ є опуклим донизу.

Точку $M(x_0, y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ називають її ***точкою перегину***, якщо вона відокремлює ділянку кривої, де $f(x)$ опукла догори, від інтервалу, де ця функція опукла донизу (рис. 4.4).

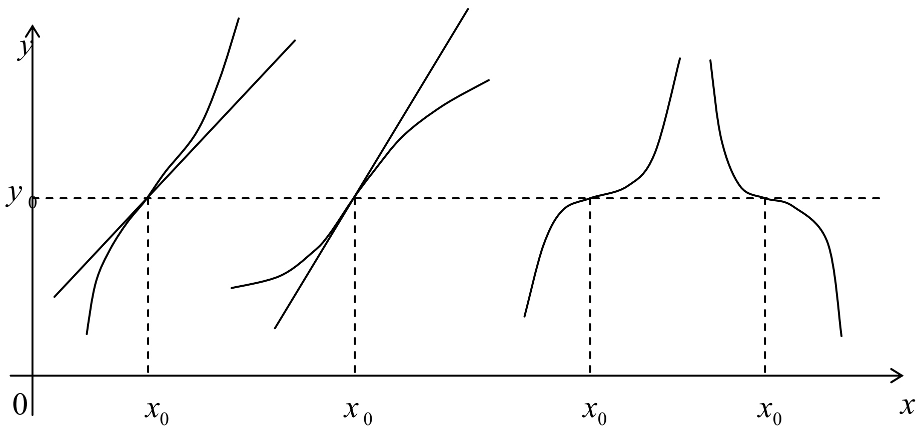

Рис. 4.4 – Точки перегину функцій

Якщо на даному інтервалі функція $f(x)$ має скінчену похідну $f'(x)$, то похідна $f'(x)$ за означенням 1 зростає зліва від точки перегину x_0 і спадає справа, або навпаки – $f'(x)$ спадає зліва і зростає справа. У першому випадку похідна $f'(x)$ має в точці x_0 максимум, а в другому – мінімум. Тому якщо існує скінчена друга похідна $f''(x)$, то необхідною умовою перегину графіка функції $f(x)$ в точці x_0 є рівність

$$f''(x) = 0, \tag{4.6}$$

Умова (4.6) має таку саме роль відносно точок перегину, яку має умова $f'(x_0) = 0$ для відшукання точок екстремумів функції $f(x)$, тобто умова (4.6) є тільки необхідною, але не достатньою.

Приклад. Для $y = x^4$ маємо $y'(x) = 4x^3$, $y'' = 12x^2 \ge 0$ $\forall x \in (-\infty, \infty)$. Тому графік $y = x^4$ є опуклим донизу всюди на $(-\infty, \infty)$, хоча $y'' = 0$ при $x = 0$.

Якщо $f''(x)$ існує всюди в середині інтервалу, що розглядається, то абсциси точок перегину слід шукати між коренів рівняння $f''(x)=0$. Але кожний корінь належить випробуванню.

Можна встановити *правило* (яке аналогічне 1-му правилу пошуку екстремумів): якщо при переході через точку x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то маємо перегин; якщо знак $f''(x)$ не змінюється, то перегину немає.

Без доведення дамо *друге правило* пошуку точок перегину. Якщо перша з похідних вище другого порядку, яка не дорівнює нулю в точці x_0, є похідною непарного порядку, то точка x_0 є точкою перегину, а якщо вона парного порядку, то перегину немає.

Зауваження. Якщо $f''(x)$ не існує в точці x_0, то ця точка також належить випробуванню на перегин.

4.7 Асимптоти графіка функції

При дослідженні функції важливо встановити форму її графіка, коли $x \to \pm\infty$, а також її поведінку поблизу таких точок, де значення функції не визначено, тобто в точках, де $f(x) \to \pm\infty$, або інакше поблизу точок розриву другого роду функції $f(x)$.

Пряма $y = kx + b$ називається асимптотою графіка функції $f(x)$ при $x \to \pm\infty$, якщо

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0, \tag{4.7}$$

Рівність (4.7) означає, що функція $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ є нескінченно малою, коли $x \to \pm\infty$. З останньої рівності маємо

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{b + \alpha(x)}{x},$$

і переходячи до границі при $x \to \pm\infty$, дістанемо

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{4.8}$$

Аналогічно знаходимо, що

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right]. \tag{4.9}$$

В окремому випадку, коли $k = 0$, асимптота називається горизонтальною, а в загальному випадку – похилою.

Зазначимо, що в загальному випадку асимптоти графіка функції $f(x)$ для $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ відрізняються одна від одної. Якщо границі (4.8) не існує, то крива не має похилих асимптот.

Приклад. Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$. Маємо $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2} = 2$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\dfrac{2x^2 - 1}{x} - 2x \right] = 0$. Отже, пряма $y = 2x$ є похилою асимптотою при $x \to \pm\infty$.

Приклад. Нехай $f(x)=xe^x$. Тоді $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ і графік $f(x)$ не має похилої асимптоти при $x\to\infty$. Але при $x\to-\infty$ дістаємо $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ і $b=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$. Тому графік $f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y=0$ при $x\to-\infty$.

Пряма $x=c$ називається ***вертикальною асимптотою*** графіка функції $f(x)$, якщо

$$\lim_{x\to c-0}f(x)=\pm\infty,\ \text{або}\ \lim_{x\to c+0}f(x)=\pm\infty. \qquad (4.10)$$

Приклад. Нехай $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$. Тоді $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$, тобто $\lim\limits_{x\to1\pm0}f(x)=\pm\infty$ і $\lim\limits_{x\to-1\pm0}f(x)=\pm\infty$. Тому прямі $x=-1$ і $x=1$ є вертикальними асимптотами.

4.8 Дослідження функції і побудова її графіка

Переважною метою побудови графіка функції в математичному аналізі є встановлення якомога точної характеристики ходу зміни функції; точність окремих координат буде цікавити нас меншою мірою.

Звичайний спосіб побудови графіка функції "за точками", які взяті нехай і густо, але випадково і без урахування особливостей графіка, є непридатним. Він потребує великих чисельних розрахунків, що непрактично і незручно. Але – і це головне – він незручний принципово, оскільки через випадковість вибору точок не забезпечує досягнення поставленої мети.

Отже, можна рекомендувати таку схему дослідження функції і побудови її графіка.

1. Знаходимо область визначення функції $f(x)$, інтервали неперервності і точки розриву.
2. Досліджуємо на парність і непарність.
3. Досліджуємо на періодичність і у випадку періодичності знаходимо період.
4. Знаходимо (якщо це можливо) точки перетину графіка функції $f(x)$ з осями, якщо вони існують.
5. Знаходимо інтервали, на яких функція не змінює свій знак.
6. Знаходимо і будуємо асимптоти (похилі і вертикальні).
7. Знаходимо інтервали монотонності і точки екстремумів, наносимо їх на графік.
8. Знаходимо інтервали опуклості догори і донизу і точки перегину.
9. За знайденими "опорними" точками будуємо графік функції, враховуючи з'ясовану поведінку функції між опорними точками.

Контрольні запитання і задачі до розділу 4

1. Задачі, що приводять до поняття похідної.
2. Визначення похідної від функції.
3. Похідна від складеної і оберненої функції, похідна від неявної функції.
4. Запишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
5. Знайдіть похідну функції $f(x)=x^2-\sin 3x$.
6. Що таке диференціал функції?

7. Що таке інваріантність форми першого диференціала?
8. Диференціювання параметричних функцій.
9. Знайдіть диференціал функції $f(x)=x^3e^{2x-1}$.
10. Сформулювати теореми Ферма і Ролля.
11. В чому полягає геометричний зміст теореми Лагранжа?
12. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей.
13. За допомогою правила Лопіталя обчисліть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$.
14. Знайдіть екстремуми функції $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$.
15. Знайдіть інтервали зростання й спадання функції $f(x)=xe^{-x}$.
16. Визначіть інтервали, на яких функція $f(x)=2x^3-4x^2+x-3$ опукла догори, і інтервали, на яких функція опукла донизу.
17. Чи існують асимптоти графіка функції $f(x)=xe^{\frac{2}{x}}+1$? Які саме?
18. Проведіть загальне дослідження функції $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ і побудуйте її графік.
19. Застосування диференціального числення до задач геометрії та фізики.

РОЗДІЛ 5. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

В цьому розділі ми від функцій з однією змінною переходимо до вивчення функцій з багатьма незалежними змінними. В подальшому ми обмежимося лише функціями двох незалежних змінних. Відзначимо лише, що всі поняття без жодних обмежень можуть бути перенесені на випадок функцій з більше ніж двома незалежними змінними.

5.1 Функція двох незалежних змінних

Раніше ми розглядали числову пряму і функції, що були задані на ній. Розглянемо тепер площину. Кожна точка M цієї площини характеризується двома координатами $\left(x_1, x_2\right)$. Відстань між двома точками $M_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ та $M_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$ легко знаходиться за теоремою Піфагора: $d\left(M_1, M_2\right) = \sqrt{\left(x_1^{(1)} - x_1^{(2)}\right)^2 + \left(x_2^{(1)} - x_2^{(2)}\right)^2}$.

При вивченні функцій однієї незалежної змінної доводилося мати справу з інтервалами на числовій прямій та їх об'єднаннями. Для функцій двох незалежних змінних такими елементарними множинами є області на площині (рис. 5.1).

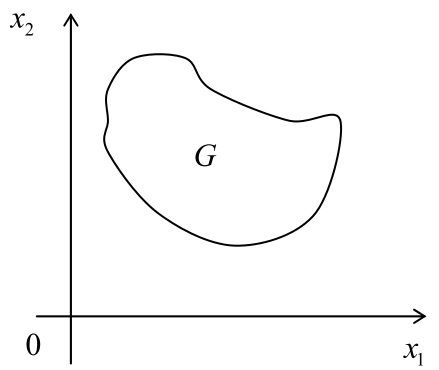

Рис.5.1 – Область G на площині

Якщо задано правило, за яким кожній парі точці $M \in G$ ставиться у відповідність число y, то кажуть, що на множині $G \subset R^2$ задано *функцію двох змінних* $y = f\left(M\right) = f\left(x_1, x_2\right)$.

Приклад. Функція $f\left(x_1, x_2\right) = x_1 - x_2$, $x_1 \in \left(-\infty, \infty\right)$, $x_2 \in \left(-\infty, \infty\right)$ є функцією двох незалежних змінних. Область G, на якій визначена функція, співпадає з усією площиною R^2.

Приклад. Функція $f\left(x, y\right) = \dfrac{x}{y}$ існує на всій площині, за виключенням прямої $y = 0$.

Виходячи з означення відстані на площині, дамо означення околу точки.

Множина U, що міститься у R^2, називається δ*-околом* точки $M_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$, якщо для будь-якого $M \in U$ виконана нерівність $d\left(M, M_0\right) < \delta$.

Проколеним околом точки M_0 називається окіл, з якого вилучено точку M_0, тобто це така множина U, для кожної точки якої виконана нерівність $0 < d\left(M, M_0\right) < \delta$.

Число P будемо називати *границею функції* $f(M)$ у точці M_0 і позначати

$$\lim_{M \to M_0} f\left(M\right) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ y_1 \to y_1^{(0)}}} f\left(x_1, x_2\right) = P,$$

якщо для будь-якого, як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться якесь число $\delta > 0$, що із нерівності $0 < d\left(M, M_0\right) < \delta$ випливає нерівність $\left|f\left(M\right) - P\right| < \varepsilon$.

Функція називається *неперервною* в точці M_0, якщо її границя у точці M_0 співпадає із значенням самої функції: $\lim\limits_{M \to M_0} f\left(M\right) = f\left(M_0\right)$, тобто $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ x_2 \to x_2^{(0)}}} f\left(x_1, x_2\right) = f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$.

Це означення цілком ідентичне до того, що було для функції однієї змінної, але тепер M – це точка на площині $M = \left(x_1, x_2\right)$, іншими словами, це дві незалежні змінні x_1, x_2. Якщо функція неперервна в точці, то границя може обчислюватися так само, як і для однієї змінної.

Геометричний зміст неперервності очевидний: графік функції у точці M_0 є суцільною поверхнею.

5.2 Частинні похідні

Нехай на множині $G \subset R^2$ задано функцію $f\left(x, y\right)$. Частинною *похідною функції* $f\left(x, y\right)$ *за змінною* x називається границя відношення приросту функції за цією змінною до приросту змінної, коли приріст змінної прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x.$$

Аналогічно для змінної y частинною похідною називається границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x_0, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y.$$

Для того, щоб знайти частинну похідну, необхідно скористатися звичайними правилами диференціювання функцій, вважаючи при цьому іншу змінну сталою.

Приклад. Знайдемо частинні похідні функції $f\left(x, y\right) = \left(x^2 + xy\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + xy\right) = 2x + y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+xy\right)=y.$$

Приклад. Знайдемо частинні похідні функції $f\left(x,y\right)=\sin x+e^x\cos y$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x+e^x\cos y\right)=\cos x+e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin x+e^x\cos y\right)=-e^x\sin y.$$

За аналогією до похідних вищих порядків функції однієї змінної, для функцій двох (та більше) змінних вводять поняття частинних похідних вищих порядків.

Другою частинною похідною функції $f\left(x,y\right)$ за змінною x називається частинна похідна за x від першої частинної похідної за x: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Другою частинною похідною функції $f\left(x,y\right)$ зі змінною y називається частинна похідна за y від першої частинної похідної за y: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Мішаною частинною похідною другого порядку функції $f\left(x,y\right)$ називається частинна похідна за змінною x від першої частинної похідної за змінною y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Приклад. Знайдемо частинні похідні до другого порядку включно для функції $f\left(x,y\right)=x\ln y+\sin x$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\ln y+\cos x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\sin x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}.$$

5.3 Безумовний екстремум функції двох незалежних змінних

Точка M_0 називається *точкою максимуму (мінімуму)*, якщо в будь-якому достатньо малому околі цієї точки виконано нерівність $f(M_0) \geq f(M)$ (відповідно $f\left(M_0\right) \leq f\left(M\right)$). Такі екстремуми називаються також *безумовними екстремумами*.

Умови існування безумовного екстремуму функції двох незалежних змінних цілком подібні умовам існування екстремуму функції однієї змінної.

<u>Теорема</u> (без доведення). Нехай функція $f\left(x, y\right)$ означена на множині G і має на ній скінчену похідну. Для того, щоб у точці $M_0 = \left(x_0, y_0\right) \in G$ існував екстремум функції $f\left(x, y\right)$, необхідно, щоб її частинні похідні першого порядку в точці M_0 дорівнювали нулю:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 0.$$

Точки, в яких всі частинні похідні обертаються на нуль, називаються *стаціонарними точками* функції $f\left(x, y\right)$. Для знаходження всіх таких точок необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{5.1}$$

Зауваження. Як і для функції однієї змінної, екстремум може існувати у тих точках, де частинні похідні не існують. Тому для знаходження екстремумів необхідно випробовувати не лише ті точки, які є розв'язком системи (5.1), а також і ті, в яких частинні похідні не існують, тобто мають розрив.

Сформулюємо тепер (без доведення) теорему про достатні умови екстремуму функції двох незалежних змінних.

<u>Теорема.</u> Нехай функція $f\left(x, y\right)$ визначена в області $G \subset R^2$ і в точці $M_0\left(x_0, y_0\right) \in G$ її частинні похідні дорівнюють нулю $\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x} = \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y} = 0$, а другі похідні існують і дорівнюють $A = \frac{\partial^2 f\left(M_0\right)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f\left(M_0\right)}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f\left(M_0\right)}{\partial y^2}$. Тоді якщо

1) $\Delta = AC - B^2 > 0$ і $A < 0$, то точка M_0 є точкою максимуму;

2) $\Delta > 0$ і $A > 0$, то точка M_0 є точкою мінімуму;

3) $\Delta < 0$, то екстремуму немає;

4) $\Delta = 0$, то відповісти на питання про існування екстремуму без подальших досліджень неможливо.

Зауваження. Легко побачити, що число Δ є ні чим іншим, як визначником, що складається з других частинних похідних функції $f\left(x, y\right)$, обчислених у точці M_0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f\left(M_0\right)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f\left(M_0\right)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f\left(M_0\right)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f\left(M_0\right)}{\partial y^2} \end{vmatrix}. \tag{5.2}$$

Приклад. Проведемо дослідження функції $z = x^3 - 3xy + y^3$ на екстремум.

Знаходимо частинні похідні і дорівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши рівняння, дістанемо дві стаціонарні точки $(0,0)$ та $(1,1)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3.$$

1) У точці $(0,0)$: $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$, $\Delta = -9 < 0$, екстремуму немає.

2) У точці $(1,1)$: $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$, $\Delta = 36 - 9 = 25 > 0$, точка мінімуму.

Точки мінімуму та максимуму являють собою лише локальні мінімуми або максимуми. При знаходженні *найбільшого і найменшого значень функції* в деякій області G необхідно пам'ятати, що ці значення досягаються або в точках екстремуму, або на границі області.

5.4 Умовні екстремуми

Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ називається екстремум цієї функції за умови виконання рівності $\varphi(x, y) = 0$. При цьому рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називають *рівнянням зв'язку*.

Зауважимо, що поняття умовного екстремуму є новим для функцій двох змінних і не має аналогів серед функцій однієї змінної.

Будемо припускати, що функція $f(x, y)$ визначена на множині $G \subset R^2$ і має скінчені частинні похідні до другого порядку включно. Поставимо задачу про знаходження екстремумів функції $f(x, y)$ за умови зв'язку $\varphi(x, y) = 0$.

Загальним способом розв'язання такої задачі є *метод множників Лагранжа*. Полягає він в тому, що замість вихідної функції $f(x, y)$ записують допоміжну функцію:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y), \tag{5.3}$$

де λ – невідомий параметр. Після чого вже знаходять безумовні екстремуми функції (5.3). Така функція називається функцією Лагранжа.

<u>Теорема</u> (без доведення). Розв'язки задачі на умовний екстремум для функції $f(x, y)$ є стаціонарними точками функції Лагранжа (5.3).

Сформульована теорема зводить задачу про пошук умовних екстремумів функції двох змінних до задачі на безумовний екстремум для функції трьох змінних. Необхідна умова існування екстремуму подібна до умові для функцій двох змінних:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \qquad (5.4)$$

Таким чином, система рівнянь (5.4) дозволяє знайти стаціонарні точки функції Лагранжа. Після цього для кожної стаціонарної точки (x_0, y_0) знаходять похідні другого порядку і перевіряють їх так само, як і для безумовного екстремуму.

Контрольні запитання і задачі до розділу 5

1. Дати визначення функції кількох змінних.
2. Як обчислюються частинні похідні?
3. Знайдіть частинні похідні функції $f(x, y) = x \sin y - y^2 \cos 2x$.
4. Сформулюйте необхідні умови існування безумовного екстремуму функції двох змінних.
5. Які умови є достатніми для існування безумовного екстремуму функції двох змінних.
6. Що таке умовний екстремум?
7. Методи знаходження умовних екстремумів.

РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛ

6.1 Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$, якщо $\forall x \in [a,b]$ справджується рівність: $F'(x) = f(x)$, або $dF(x) = f(x)dx$.

Теорема. Якщо на інтервалі $[a,b]$ функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то й функція $F(x)+C$ є також первісною. І навпаки, кожної первісної для $f(x)$ на $[a,b]$ можна надати вигляд $F(x)+C$.

Доведення. Отже $F(x)$ і $F(x)+C$ – первісні функції для $f(x)$, що очевидно, бо $\left[F(x)+C\right]' = F'(x) = f(x)$. Нехай $\Phi(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тому $\Phi'(x) = f(x)$. Оскільки $\Phi(x)$ і $F(x)$ на $[a,b]$ мають одну саму похідну $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x)+C$.

Звідси випливає, що коли існує принаймні одна первісна $F(x)$, то існує нескінченна множина первісних вигляду $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Множина всіх первісних для функції $f(x)$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

де $F'(x) = f(x)$, C – стала. При цьому функцію $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, а $f(x)dx$ – підінтегральним виразом.

Процес обчислення інтеграла від функції $f(x)$ називають інтегруванням. Функція, що має первісну, називається інтегрованою. Поняття «невизначений інтеграл» є оберненим до поняття «похідна». Невизначений інтеграл – функція, обчислення похідної якої приводить до відомої вже заданої функції. Тому таблиця похідних основних елементарних функцій служить джерелом побудови таблиці інтегралів 6.1. Справедливість таблиці інтегралів перевіряється безпосереднім диференціюванням первісних.

Таблиця 6.1 – Таблиця інтегралів

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	C
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$, $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x + C$

e^x	$e^x + C$	$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \dfrac{x}{a} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\dfrac{1}{x^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$		

Властивості невизначеного інтеграла випливають з його визначення. Відзначимо деякі з них:

1. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$, або $d \int f(x) dx = f(x) dx$;
2. $\int f'(x) dx = f(x) + C$, або $\int df(x) = f(x) + C$;
3. $\int \left[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \right] dx = \alpha \int f_1(x) dx + \beta \int f_2(x) dx$,

$\alpha = const$, $\beta = const$ (лінійність інтеграла).

Обчислення невизначеного інтеграла за допомогою таблиці основних інтегралів і його властивостей називають безпосереднім інтегруванням.

Надалі доведемо, що для неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$ завжди існує первісна $F(x)$, тобто невизначений інтеграл.

Зауваження. Якщо похідна від елементарної функції завжди обчислюється за допомогою певних правил і є елементарною функцією, то первісна для елементарної функції може виявитися неуявною за допомогою скінченої кількості елементарних функцій, тобто елементарна функція може бути неінтегрованою в елементарних функціях.

Коли функція $f(x)$ інтегровна в елементарних функціях, то кажуть, що вона інтегрована в ***квадратурах***.

Зазначимо, що обчислення інтегралів здебільшого є мистецтвом. Але існує допомога, яку надають різні методи інтегрування, до розгляду яких і перейдемо.

6.2 Метод заміни змінної

Одними з найбільш використовуваних методів інтегрування є заміна змінної під знаком інтеграла та інтегрування частинами.

Суть методу заміни змінної під знаком інтеграла полягає у введенні під знак інтеграла такої змінної, що після підстановки і заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної дістають табличний інтеграл.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \sin(7x + 5) dx$. Покладемо $7x + 5 = t$, тоді $dt = 7dx$, $dx = \dfrac{1}{7} dt$.

Виконаємо заміну

$$\int \sin(7x+5)\,dx = \int \sin t \cdot \frac{dt}{7} = \frac{1}{7}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{7}\cos t + C.$$

Підставляючи тепер $7x+5$ замість t , дістанемо

$$\int \sin(7x+5)\,dx = -\frac{1}{7}\cos(7x+5) + C.$$

Наведемо загальні міркування щодо методу заміни змінних під знаком інтеграла. Нехай дано функцію $f(x)$ таку, що $y' = f(x)$, а $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна і диференційована на (α, β) функція. Тоді

$$dy = f(x)\,dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

або в інтегральній формі

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Цю формулу записують ще таким чином:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt.$$

Отже, за допомогою введення нової змінної інтеграл від складного виразу зводиться до простішого. В процесі перетворень доводиться розв'язувати рівняння $x = \varphi(t)$ відносно t, а також знаходити похідні за x і t. Тому підстановку $x = \varphi(t)$ можна використовувати лише тоді, коли функція $\varphi(t)$ є монотонною і неперервно диференційованою на деякому інтервалі (α, β).

<u>Теорема</u>. Якщо дано інтеграл $\int f(x)\,dx$ і функція $x = \varphi(t)$ на інтервалі (α, β) є монотонною і неперервно диференційовною, то

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Приклад.

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg} x = t \\ dt = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \end{bmatrix} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$$

Вміння відшуковувати вигідні підстановки приходить з досвідом і тому загальні вказівки дати неможливо. Проте, окремі зауваження можна навести.

1. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \begin{vmatrix} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$

2. $\displaystyle\int f(x^n)\,x^{n-1}\,dx = \begin{vmatrix} t = x^n \\ dt = nx^{n-1}\,dx \end{vmatrix} = \frac{1}{n}\int f(t)\,dt.$

3. $\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{matrix} \right| = \int f(t)\,dt$.

6.3 Метод інтегрування частинами

Нехай задано дві неперервно диференційовані функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Розглянемо добуток $y = u \cdot v$. Знайдемо диференціал

$$dy = d(u \cdot v) = udv + vdu .$$

Взявши інтеграли від обох частин цієї рівності, дістанемо

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu ,$$

$$uv = \int udv + \int vdu ,$$

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

Остання формула називається ***формулою інтегрування частинами***. Тут інтеграл від деякої функції зводиться до обчислення іншого інтеграла.

Приклад.

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} x = u, & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C .$$

Наведемо деякі типи інтегралів, що можуть бути обчислені шляхом інтегрування частинами.

1. $\int P_n(x)e^x dx$, де $P_n(x)$ – багаточлен степеня n. Цей інтеграл можна зобразити через елементарні функції, якщо послідовно застосовувати формулу інтегрування частинами, надавши

$P_i(x) = u$, $e^x dx = dv$

для $i = n, n-1, ..., 1$.

2. Аналогічно обчислюють інтеграли $\int P_n(x)e^{ax+b}dx$, $\int P_n(x)\sin(ax+b)dx$, $\int P_n(x)\cos(ax+b)dx$. При цьому через u позначають $P_n(x)$, а через dv – решту виразу.

Приклад.

$$\int x^2 \sin x\, dx = \begin{bmatrix} x^2 = u, & dv = \sin x\, dx \\ du = 2xdx, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\int x \cos xdx =$$

$$= \begin{bmatrix} x = u & dv = \cos xdx \\ du = dx & v = \sin x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2x\sin x - 2\int \sin xdx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

3. $\int P_n(x)\ln xdx$. Цей інтеграл можна зобразити через елементарні функції, якщо застосувати формулу інтегрування частинами, поклавши

$$\ln|x| = u ,\ P_n(x)dx = dv .$$

4. $\int P_n(x)\ln^m x dx$, де m – ціле додатне число, $m>1$. Інтеграл виражається через елементарні функції, якщо послідовно застосовувати формулу інтегрування частинами, поклавши

$$\ln^i x = u\,,\ P_n(x)dx = dv$$

для $i = m, m-1, \ldots, 1$.

Приклад.

$$\int x\ln^2 x dx = \begin{bmatrix} \ln^2 x, & dv = xdx \\ du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx, & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int\frac{x^2}{2}2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x dx = \begin{bmatrix} \ln x = u, & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{22}\ln x + \int\frac{z}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C\,.$$

5. $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$. Цей інтеграл можна записати через інтеграл:

$$\int P_{n+1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

якщо покласти $\arcsin x = u$, $dv = P_n(x)dx$. Аналогічно обчислюють інтеграли, в яких під знаком інтеграла містяться функції $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

6. $\int e^x \sin x dx$. В результаті дворазового застосування методу інтегрування частинами дістаємо лінійне рівняння відносно заданого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо вираз інтеграла в елементарних функціях.

Приклад.

$$\int e^x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} \sin x = u, & dv = e^x dx \\ du = \cos x\,dx, & v = e^x \end{bmatrix} = e^x\sin x - \int e^x \cos x\,dx\,.$$

Тепер ще раз застосовуємо метод інтегрування частинами:

$$\int e^x \cos x\,dx = \begin{bmatrix} \cos x = u, & dv = e^x dx \\ du = -\sin x\,dx, & v = e^x \end{bmatrix} = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx\,.$$

У результаті маємо рівняння

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x \sin x\,dx\,.$$

Розв'язуючи його, дістаємо

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x\right) + C .$$

6.4 Інтегрування раціональних дробів

Методи інтегрування заміною змінної і частинами не визначають взагалі наперед точного шляху обчислення інтегралів, залишаючи багато вправності обчислювачу.

В цьому і наступному розділах зупинимось докладніше на деяких важливих класах функцій і встановимо відносно їх інтегралів цілком визначений порядок інтегрування.

Ціла раціональна функція має вигляд:

$$P_m\left(x\right) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_{m-1} x + a_m , \tag{6.1}$$

де $a_0, a_1, ..., a_m$ – сталі, а дробово-раціональна (або просто раціональна) функція визначається виразом

$$R\left(x\right) = \frac{P_m\left(x\right)}{Q_n\left(x\right)}, \tag{6.2}$$

де $P_m\left(x\right)$ і $Q_n\left(x\right)$ – раціональні функції.

Раціональний дріб $R\left(x\right)$ називають правильним коли $m < n$, в протилежному разі ($m \geq n$) його називають неправильним.

Лема. Всякий неправильний дріб $R\left(x\right)$ можна представити у вигляді (припускаємо, що $m > n$ і спускаємо індекси):

$$R\left(x\right) = \frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)} = L\left(x\right) + \frac{r\left(x\right)}{Q\left(x\right)}, \tag{6.3}$$

де $L\left(x\right)$ є часткою від ділення $P\left(x\right)$ на $Q\left(x\right)$, а $r\left(x\right)$ – остачею від ділення.

Дійсно, запис (6.2) еквівалентний такому:

$$P\left(x\right) = L\left(x\right) Q\left(x\right) + r\left(x\right). \tag{6.4}$$

У формулі (6.3) функція $L\left(x\right)$ є поліномом (багаточленом), інтеграл від якого обчислюється елементарно за допомогою таблиці інтегралів, а $r\left(x\right)$ має степінь, менший за степінь $Q\left(x\right)$. Тому вираз $\dfrac{r\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$ є правильним дробом.

Отже, надалі розглядатимемо тільки правильні раціональні дроби типу (6.2) з $m < n$.

У вищій алгебрі існує теорема, яка має фундаментальне значення щодо інтегрування раціональних функцій.

Теорема (без доведення). Всякий правильний раціональний дріб (6.2) можна єдиним способом розкласти на суму простіших дробів:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}+\ldots+ \quad (6.5)$$

$$+\frac{F_1x+G_1}{x^2+fx+g}+\frac{F_2x+G_2}{\left(x^2+fx+g\right)^2}+\ldots+\frac{F_nx+G_n}{\left(x^2+fx+g\right)^n},$$

за умови, що знаменник

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l\ldots\left(x^2+px+q\right)^m\ldots\left(x^2+fx+g\right)^n, \quad (6.6)$$

де A_i, B_i, ..., M_i, N_i, ..., F_i, G_i, a, b, ..., p, q, ..., f, g – дійсні числа.

Таким чином, вираз (6.5) є безпосередньо пов'язаним з розкладом багаточлена $Q(x)$ на простіші множники. Причому відомо, що кожний багаточлен типу (6.1) єдиним способом розкладається на дійсні множники типу $(x-a)^k$ і $\left(x^2+px+q\right)^m$, де a є коренем кратності k функції $Q(x)$, а тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто знаменник $Q(x)$ можна подати у вигляді (6.6) так, що $k+l+\ldots+2(m+..+n)=N$, де N – степінь багаточлена $Q(x)$.

Для знаходження поки що невідомих коефіцієнтів A_i, B_i, ..., M_i, N_i, ..., F_i, G_i у виразі (6.5) звичайно застосовують ***метод невизначених коефіцієнтів***.

Сутність цього методу пояснимо таким прикладом. Нехай маємо дріб:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2x^2+2x+13}{x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4}. \quad (6.7)$$

Можна безпосередньо впевнитися, що знаменник має вигляд $Q(x)=(x-2)^2\left(x^2+1\right)^2$, причому рівняння $x^2+1=0$ не має дійсних коренів. Тоді згідно з (6.5) матимемо

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}. \quad (6.8)$$

Приведемо праву частину рівності (6.7) до спільного знаменника. Враховуючи, що обидві частини рівності (6.8) мають однакові знаменники, дістаємо рівність для чисельників, а саме:

$$2x^2+2x+13=A(x-2)\left(x^2+1\right)^2+B\left(x^2+1\right)^2+(Cx+D)(x-2)^2\left(x^2+1\right)+(Ex+F)(x-2)^2.$$

Або, розкриваючи дужки, матимемо рівність:

$$+(-4A+2B+5D-4C+F-4E)x^2-(A-4D+4C-4F+4E)x+(-2A+B+4D+4F),$$

яка повинна справджуватися при будь-якому значенні змінної x, що можливо, коли коефіцієнти при однакових степенях x співпадають:

$$x^5 \Rightarrow A + C = 0\,,$$

$$x^4 \Rightarrow -2A + B + D - 4C = 0\,,$$

$$x^3 \Rightarrow A + 5C - 4D + E = 0\,,$$

$$x^2 \Rightarrow -4A + 2B + 5D - 4C + F - 4E = 2\,,$$

$$x \Rightarrow A - 4D + 4C - 4F + 4E = 2\,,$$

$$x^0 \Rightarrow -2A + B + 4D + 4F = 13\,.$$

Отже, дістали систему шести рівнянь для шести невідомих A, B, C, D, E, F, розв'язуючи яку, маємо $A = -\frac{6}{5}$, $B = 1$, $C = \frac{6}{5}$, $D = \frac{6}{5}$, $E = 2$, $F = 1$. У результаті дріб (6.7) остаточно набирає вигляду:

$$\frac{x^2 + 2x + 13}{x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4} = -\frac{6}{5}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{6}{5}\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

Таким чином, враховуючи розклад (6.5) дробово-раціональної функції, її інтегрування зводиться до інтегрування чотирьох простіших дробів, а саме:

$$1.\ \frac{A}{x-a}; \qquad 2.\ \frac{A}{(x-a)^k},\ k = 2, 3, \ldots; \tag{6.9}$$

$$3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad 4.\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m},\ m = 2, 3, \ldots; \tag{6.10}$$

де A, M, N, a, p, q є дійсними числами. При цьому припускатимемо, що рівняння $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, що означає, що його дискримінант $D = \frac{1}{4}p^2 - q < 0$, або, інакше, $q - \frac{1}{4}p^2 > 0$.

Дроби виду 1 і 2 інтегруються елементарно і дають:

$$A\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C\,, \tag{6.11}$$

$$A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}(x-a)^{-(k-1)} + C = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C\,. \tag{6.12}$$

Інтегрування дробів 3 і 4 полегшується за допомогою заміни змінних. Для цього виділяють повний квадрат у знаменнику:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{1}{4}p^2 + q - \frac{1}{4}p^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{1}{4}p^2\right).$$

Оскільки $q - \frac{1}{4}p^2 > 0$, то позначимо $q - \frac{1}{4}p^2 = a^2$, де $a > 0$. Робимо заміну

$x+\frac{1}{2}p=t$. Тоді $x=t-\frac{1}{2}p$ і $dx=dt$, а $x^2+px+q=t^2+a^2$ і $Mx+N=Mt+\left(N-\frac{1}{2}p\right)$.

У випадку 3 маємо

$$I=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{1}{2}p\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$
$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{1}{2}p\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Отже,

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

У випадку 4 та сама підстановка приводить до

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^m}+\left(N-\frac{1}{2}Mp\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}.$$

Тут перший інтеграл легко обчислюється й дає

$$\int\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^m}=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}}+C=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{m-1}}+C.$$

Для другого інтеграла методом інтегрування частинами можна дістати *рекурентну формулу*. Дійсно, розглянемо інтеграл:

$$I_m=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m}+2m\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}}=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^2}+2m\int\frac{\left(t^2+a^2\right)-a^2}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}}dt=$$
$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m}+2m\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}-2ma^2\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}}.$$

Останній вираз, враховуючи визначення інтеграла I_m, можна записати у вигляді:

$$I_m=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m}+2mI_m-2ma^2I_{m+1},$$

відкіля дістаємо

$$I_{m+1}=\frac{1}{2ma^2}\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m}+\frac{2m-1}{2m}\frac{1}{a^2}I_m, \tag{6.13}$$

де $t = x + \frac{1}{2}p$ і $a^2 = q - \frac{1}{4}p$.

Таким чином рівність (6.13) зводить обчислення інтеграла I_{m+1} до обчислення інтеграла I_m, індекс якого на одиницю менше. Оскільки нам відомий інтеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a},$$

то, застосовуючи формулу (6.13), можна обчислити інтеграл I_m при будь-якому значенні m.

А тепер, враховуючи все вищевказане, обчислимо інтеграл від функції (6.7). Матимемо:

$$\int \frac{x^2+2x+13}{x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4}dx = -\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{5}{6}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx + \int\frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx =$$

$$= -\frac{5}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{6}{5}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C =$$

$$= \frac{6}{5}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-2|} - \frac{1}{x-2} + \frac{x-2}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{17}{10}\operatorname{arctg}x + C.$$

Підсумовуючи, зазначимо, що інтегрування широких класів тригонометричних й ірраціональних функцій шляхом заміни змінних веде, як правило, до інтегрування раціональних функцій.

6.5 Інтегрування тригонометричних функцій

Для інтегралів від тригонометричних функцій не завжди можна дістати вираз у вигляді скінченої комбінації елементарних функцій, тобто такі інтеграли не завжди обчислюються. Однак, можна вказати на підклас таких функцій, інтеграли від яких виражаються у скінченому вигляді. До цього підкласу належать функції, які є раціональними від функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Деякі тригонометричні вирази після тих чи інших перетворень інтегруються за допомогою елементарних прийомів. Розглянемо декілька з них.

1. $\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2ax\right)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + C$.

2. $\int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos 2ax\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + C$.

3. $\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin\left(a+b\right)x + \sin\left(a-b\right)x\right]dx =$

$$= -\frac{1}{2(a+b)}\cos\left(a+b\right)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos\left(a-b\right)x + C.$$

Аналогічно обчислюються інтеграли:

4. $\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2(a+b)}\sin\left(a+b\right)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin\left(a-b\right)x + C$.

5. $\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2(a-b)}\sin\left(a-b\right)x - \frac{1}{2(a+b)}\sin\left(a+b\right)x + C$.

Також елементарно обчислюються інтеграли типу:

6. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.

7. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$.

8. $\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$.

9. $\int e^{\cos x} \sin x \, dx = -\int e^{\cos x} d(\cos x) = -e^{\cos x} + C$.

Цікавий приклад дає інтеграл:

10. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C$.

Відкіля негайно маємо:

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Важливим класом функцій, з якими доводиться зустрічатися, є функції виду $R(\sin x, \cos x)$, де $R(u, v)$ – раціональна функція двох змінних. Для того, щоб знайти інтеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$, використовують підстановку, яка дозволяє звести вихідний інтеграл до інтегралу від раціональної функції. Суть цієї підстановки полягає в заміні змінної:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

тоді

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \; dx = d(2 \operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

Така підстановка називається ***універсальною***, оскільки дозволяє позбавитися тригонометричних функцій. Отже, всякий інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x) dx$ завжди можна обчислити.

Однак, саме внаслідок своєї універсальності, ця підстановка часто приводить до невиправдано ускладнених викладів. Наприклад, більш зручними можуть виявитися наступні підстановки:

а) $t = \cos x$, якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

б) $t=\sin x$, якщо $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$;

в) $t=\operatorname{tg} x$, якщо $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$.

Приклад. $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$. В даному випадку $R(u,v)=\frac{u}{u+v}$. Оскільки

$$R(-\sin x,-\cos x)=\frac{-\sin x}{-\sin x-\cos x}=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=R(\sin x,\cos x),$$

то застосовуємо підстановку $t=\operatorname{tg} x$. Тоді $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$.

$$dx=\cos^2 x\,dt=\frac{dt}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{dt}{1+t^2},\quad \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}=\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+1}=\frac{t}{t+1}.$$

Отже, дістаємо

$$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{t}{(1+t)(1+t^2)}dt,$$

а це вже інтеграл від правильного раціонального дробу, який можна знайти за допомогою методів, розглянутих в попередньому підрозділі. Пропонується самостійно закінчити цей приклад.

6.6 Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Раніше зазначалося, що не всі інтеграли виражаються через елементарні функції в скінченому вигляді. До них відносяться, зокрема,

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int e^{-x^2}dx.$$

Інтеграли, які не виражаються через елементарні функції в скінченому вигляді, часто зустрічаються також при інтегруванні функцій, що містять радикали.

Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \tag{6.14}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \tag{6.15}$$

де $R(u,v)$ – раціональна функція двох змінних, n – натуральне число, a, b, c, d – дійсні сталі.

Інтеграл (6.14), за умови $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$, раціоналізується підстановкою $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Дійсно, маємо

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d}\ \Rightarrow\ x=\varphi(t)=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\ \Rightarrow\ dx=\varphi'(t)\,dt.$$

Отже, підставляючи в (6.14), дістаємо

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)'dt\ .$$

Тут підінтегральна функція вже є раціональною функцією від t. Тому її інтегрування здійснюється за правилами, викладеними у підрозділі 6.4.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}dx$.

Проводимо заміну змінної:

$$t^2=\frac{1-x}{1+x}\ \Rightarrow\ x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \Rightarrow\ dx=-\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt\ .$$

Тоді

$$I=4\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}dt=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}+2\int\frac{dt}{1+t^2}\ .$$

Тут застосовано метод невизначених коефіцієнтів. Останні інтеграли є табличними. У результаті дістаємо:

$$I=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\operatorname{arctg}t+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C\ .$$

Розглянемо інтеграли типу (6.15):

$$I=\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx\ .$$

Звичайно, цей інтеграл можна обчислити методом приведення виразу ax^2+bx+c до повного квадрату, але більш раціональним є застосування ***підстановки Ейлера***.

Нехай $a>0$. Тоді робимо заміну змінних:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x=t\ \Rightarrow\ \sqrt{ax^2+dx+c}=t-\sqrt{a}x\ .$$

Підносимо до квадрату і знаходимо

$$ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx+ax^2\ \Rightarrow\ bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx\ \Rightarrow$$

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b};\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx=\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\right)'dt\ .$$

Вся дотепність підстановки Ейлера саме у тому, що для визначення x через t дістаємо рівняння першого степеня, і тому змінна x і радикал виявляються раціональними функціями t. Підстановка x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dx в інтеграл (6.15) приводить до інтегрування раціональної функції від t.

Якщо $a<0$, але $c>0$, то підстановкою $x=t^{-1}$ дістаємо інтеграл попереднього типу.

Якщо рівняння ax^2+bx+c має різні дійсні корені α і β ($\alpha\neq\beta$), то радикал має вигляд:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)}=\sqrt{a}\left(x-\beta\right)\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}},$$

тобто дістаємо інтеграл типу (6.14).

Приклад. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$.

Робимо заміну змінної:

$$\sqrt{x^2\pm a^2}=t-x\ \Rightarrow\ \pm a^2=t^2-2tx\ \Rightarrow\ x=\frac{t^2\mp a^2}{2t},$$

$$\sqrt{x^2\pm a^2}=\frac{t^2\pm a^2}{t};\ dx=\frac{t^2\pm a^2}{2t^2}.$$

Підставляючи до інтеграла, матимемо:

$$I=\int\frac{2t}{t^2\pm a^2}\frac{t^2\pm a^2}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C.$$

Отже, остаточно дістаємо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,$$

тобто так званий "довгий логарифм".

6.7 Визначений інтеграл

Нехай функція $f\left(x\right)$ визначена на відрізку $\left[a,b\right]$ і нехай $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots x_{n-1}<x_n=b$ довільна розбивка цього відрізка на n частинних відрізків$\left[x_{i-1},x_i\right]$, де $i=1,2,\ldots,n$. Візьмемо на кожному відрізку $\left[x_{i-1},x_i\right]$ довільну точку ξ_i і розглянемо суму:

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\text{, де }\Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$$

Число I_n називається ***інтегральною сумою функції*** $f\left(x\right)$, що відповідає даній розбивці відрізка $\left[a,b\right]$ і вибору точок ξ_i.

Позначимо через Δ максимальну з довжин частинних відрізків: $\Delta=\max\limits_{i=1,\ldots,n}\Delta x_i$

Якщо існує границя інтегральної суми I_n при $\Delta\to0$, незалежна ні від способу розбивки відрізка $\left[a,b\right]$, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається ***визначеним інтегралом*** від функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$ і позначається $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0} I_n = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,. \qquad (6.16)$$

Число a називається нижньою, число b – верхньою межею визначеного інтеграла. Якщо інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ існує, то кажуть, що функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a,b]$.

Зазначимо, що функція $f(x)$ при цьому називається ***інтегрованою за Ріманом*** (Г. Ріман, 1826-1866, – німецький математик).

Розглянемо геометричну інтерпретацію визначеного інтеграла. Якщо функція $f(x)\ge 0$ на відрізку $[a,b]$, то її інтеграл на цьому відрізку дорівнює площі криволінійної трапеції – фігури, що обмежена кривою $y=f(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$, віссю Ox.

У загальному випадку визначений інтеграл дорівнює алгебраїчній сумі площ фігур, обмежених кривими $y=f(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$, причому площі, розташовані вище осі Ox, входять у цю суму зі знаком «+», а площі, розташовані нижче осі Ox, – зі знаком «-».

Умови існування визначеного інтеграла (6.16) можна сформулювати за допомогою так званих сум Дарбу (Ж.Г. Дарбу, 1842-1917, – французький математик), але це питання лежить за межами нашого курсу. Однак, використовуючи критерій існування, можна вказати клас інтегрованих функцій (без доведення):

– якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то вона інтегрована;

– якщо обмежена на $[a,b]$ функція $f(x)$ має на ньому лише скінчене число точок розриву, то вона інтегрована;

– монотонна й обмежена функція $f(x)$ завжди інтегрована.

Основні властивості визначеного інтеграла випливають безпосередньо із його означення:

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

3. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$ функції, C_1, C_2 – сталі, то $\int_a^b \left[C_1 f(x) + C_2 g(x)\right] dx = C_1\int_a^b f(x)\,dx + C_2\int_a^b g(x)\,dx$ (властивість лінійності інтеграла).

4. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a,c]$ і на $[c,b]$, то вона інтегрована також і на $[a,b]$, причому $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (властивість адитивності інтеграла). Підкреслимо, що точка c довільно розташована відносно точок a і b.

5. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$, то

$$\int_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \,.$$

6. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$ і $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$, $a<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$
.

7. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$ і $f(x) \ge g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx .$$

8. Якщо $a < b$ і функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$, то $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Справді, маємо $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, і тому з властивості 7 випливає остання нерівність.

9. Якщо $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то має місце наступна оцінка визначеного інтеграла:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) .$$

<u>Теорема (про середнє значення)</u>. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ функція, то існує така точка $c \in [a,b]$, що $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

<u>Доведення</u> здійснюється за допомогою властивості

10. Дійсно, якщо $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$. Це означає, що існує таке μ, $m \le \mu \le M$, що $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$. Тоді з другої теореми Вейєрштрасса випливає, що існує така точка $c \in [a,b]$, в якій $f(c) = \mu$. Остання рівність і доводить теорему.

Розглянемо визначений інтеграл як функцію верхньої межі інтегрування, тобто зі змінною верхньою межею інтегрування, а саме

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt , \tag{6.17}$$

де $x \in [a,b]$ і $x \le b$. Тут для відмінності змінну інтегрування позначаємо літерою t.

<u>Теорема</u>. Якщо функція $f(t)$ інтегрована на $[a,b]$, то функція $I(x)$ неперервна на $[a,b]$.

<u>Доведення</u>. Нехай приріст аргументу $\Delta x = h$. Тоді маємо:

$$\Delta I(x) = I(x+h) - I(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c)h ,$$

де $c \in [x, x+h]$. Тут скористалися теоремою про середнє значення. Коли $h \to 0$, то очевидно, що $\Delta I(x) \to 0$ і $I(x+h) \to I(x)$. Теорему доведено.

<u>Теорема</u>. Якщо функція $f(t)$ неперервна в точці x (при $t = x$), то

$$I'(x) = f(x). \tag{6.18}$$

<u>Доведення</u>. Дійсно, за означенням похідної маємо:

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta I(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(c) h = \lim_{h \to 0} f(c),$$

де $x \le c \le x + h$. Оскільки $h \to 0$, то $c \to x$. Звідси $I'(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(c) = f(x)$ у силі неперервності функції $f(x)$. Теорему доведено.

Цей висновок має велике принципове і прикладне значення. Ця теорема є однією з основних теорем математичного аналізу. Справді, якщо функція $f(x)$ неперервна на всьому інтервалі $[a,b]$, то рівність (6.18) правильна $\forall x \in [a,b]$. Таким чином, для неперервної на $[a,b]$ функції завжди існує первісна, і прикладом цієї функції є інтеграл (6.17).

<u>Теорема</u> (формула Ньютона – Лейбниця). Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{6.19}$$

<u>Доведення</u>. Маємо $I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ і $I'(x) = f(x)$ для $a \le x \le b$. Таким чином, функція $I(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $[a,b]$. Якщо $F(x)$ є будь-якою первісною для $f(x)$, то $I(x) = F(x) + C$. Сталу C можна легко визначити, якщо надати $x = a$, оскільки $I(a) = 0$ (властивість 1). У результаті $I(a) = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$ й отже $I(x) = F(x) - F(a)$. Зокрема, коли $x = b$, то дістаємо формулу (6.19). Теорему доведено.

Отже, значення визначеного інтеграла є різницею двох значень $F(b)$ і $F(a)$ будь-якої первісної.

Формулу (6.19) називають *основною формулою* диференціального та інтегрального числення. Вона надає ефективний і простий спосіб для обчислення визначеного інтеграла від неперервної функції $f(x)$, зв'язуючи поняття визначеного інтеграла і первісної функції. Для зручності користування її звичайно записують у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{8x}{1+x^4}dx$.

Використовуємо формулу Ньютона – Лейбніца:

$$\int_0^1 \frac{8x}{1+x^4}dx = 4\int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^4} = 4\int_0^1 \frac{d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2} = 4\operatorname{arctg} x^2\Big|_0^1 = 4\left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0\right) = 4\frac{\pi}{4} = \pi$$

Основними методами обчислення визначеного інтеграла є інтегрування частинами і заміна змінної.

6.8 Методи обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона – Лейбніца дає зв'язок між визначеними інтегралами і невизначеними. Ця формула дозволяє звести задачу обчислення визначеного інтеграла до задачі знаходження невизначеного інтеграла. Отже, тут можуть бути застосовані ті ж методи, що і для невизначеного інтеграла, а саме – метод заміни змінної та інтегрування частинами.

Метод заміни змінної дається наступною теоремою.

Теорема. Якщо $f(x)$ – інтегрована функція для $x \in [a,b]$, а функції $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ – неперервні на відрізку $t \in [\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt .$$

Остання формула дуже схожа на аналогічну формулу для невизначеного інтеграла, однак має дві суттєві відмінності. По-перше, після заміни змінної у визначеному інтегралі маємо змінити межі інтегрування так, щоб нові межі α і β відповідали умовам:

$$a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta).$$

По-друге, у визначеному інтегралі немає необхідності після заміни змінної повертатися до вихідної змінної – після знаходження первісної туди підставляють нові межі α і β.

Формула інтегрування частинами визначеного інтеграла також схожа на відповідну формулу для невизначеного інтеграла. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ неперервно диференційовані на відрізку $[a,b]$ функції, то

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

Спочатку проводимо заміну змінної, а потім застосовуємо формулу Ньютона – Лейбніца:

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+1}dx = \left| \begin{array}{c} e^x+1=t \\ e^x dx = dt \\ x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=\ln 3 \Rightarrow t=e^{\ln 3}+1 \end{array} \right| = \int_2^4 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$$

Останній приклад ще раз підкреслює той факт, що для знаходження визначених інтегралів необхідно оволодіти методами обчислення невизначених інтегралів.

6.9 Невласні інтеграли

В попередніх підрозділах ми розглянули визначені інтеграли, де підінтегральна функція $f(x)$ була обмеженою, а відрізок $[a,b]$ інтегрування – скінченим. Втім поняття визначеного інтеграла переноситься і на випадок, коли межі інтеграла нескінченні або функція $f(x)$ необмежена у точці $x=a$ або $x=b$.

Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі $[a,+\infty)$ і є інтегрованою на будь-якому відрізку $[a,b]$, $b>a$, і існує границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то її називають ***невласним інтегралом першого роду*** і позначають:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Якщо ця границя скінчена, то кажуть, що невласний інтеграл ***збігається***, інакше – ***розбігається***.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$, $a>0$.

Спочатку знаходимо інтеграл в межах від a до b, а потім спрямовуємо b у нескінченність:

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}.$$

Невласний інтеграл першого роду може також мати нескінченну нижню межу:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

або нескінченні нижню і верхню межі:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Розглянемо тепер другий випадок (коли межі інтеграла скінчені, але підінтегральна функція нескінченна у кінцевих точках відрізку інтегрування).

Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі $[a,B)$ і є інтегрованою на будь-якому відрізку $[a,b]$, $a<b<B$, і існує границя $\lim\limits_{b\to B}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то її називають ***невласним інтегралом другого роду*** і позначають:

$$\int\limits_a^{B} f(x)\,dx=\lim_{b\to B}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Якщо ця границя скінчена, то кажуть, що невласний інтеграл ***збігається***, інакше – ***розбігається***.

Невласний інтеграл другого роду також може мати вигляд:

$$\int\limits_A^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to A}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

коли підінтегральна функція невизначена у точці $x=A$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Підінтегральна невизначена у точці $x=0$ (вона прямує в нескінченність, коли $x\to0$). Спочатку знаходимо інтеграл в межах від a до 1, а потім знаходимо границю при $a\to0$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2\lim_{a\to 0}\left(1-\sqrt{a}\right) = 2.$$

Відзначимо, що коли підінтегральна функція має розрив у внутрішній точці c відрізку $[a,b]$, то вихідний інтеграл може бути представлений як сума двох невласних інтегралів (за умови їх існування):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Контрольні запитання і задачі до розділу 6

1. Задачі, що приводять до поняття інтеграла.
2. Дайте визначення первісній функції.
3. Що таке невизначений інтеграл?
4. Запишіть таблицю відомих Вам інтегралів.
5. Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінних.
6. Інтегрування частинами при обчисленні інтегралів.
7. Як обчислюються невизначені інтеграли від раціональних функцій?
8. Методи обчислення інтегралів від тригонометричних функцій.
9. Обчисліть невизначений інтеграл $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$.
10. Обчисліть невизначений інтеграл $\int x^2 \cos x dx$.
11. Обчисліть невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{x^2-7x+12}$.
12. Обчисліть невизначений інтеграл $\int \sin^4 x dx$.
13. Обчисліть невизначений інтеграл $\int \sqrt{x^2-x+2}dx$.
14. В чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
15. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої кривими $y=2+x$, $y=xe^{-x}$, $x=0$, $x=2$.
16. Встановіть збіжність або розбіжність інтеграла $\int_1^{\infty} e^{-2x}dx$.
17. Встановіть збіжність або розбіжність інтеграла $\int_0^1 \ln x dx$.

РОЗДІЛ 7 . ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

7.1 Диференціальні рівняння

Розділ "Диференціальні рівняння" в курсі математики займає одне з центральних місць тому, що диференціальні рівняння дуже широко застосовуються в природознавстві і практиці, а також в теоретичних дослідженнях.

Найпростіші диференціальні рівняння вже розглядалися при вивченні інтегрального числення. Так розв'язувалася задача про знаходження функції $y = y(x)$, коли відома її похідна:

$$y' = f(x). \tag{7.1}$$

Ця задача розв'язується за допомогою операції інтегрування і зводиться до задачі обчислення квадратури:

$$y = \int f(x)\,dx + C. \tag{7.2}$$

Отже, співвідношення (7.1) є найпростішим типом диференціального рівняння, в загальному розв'язку (7.2) якого фігурує довільна стала C. Таким чином, диференціальне рівняння (7.1) має нескінченну множину розв'язків. Якщо задати початкову умову $y_0 = y(x_0)$, то цим визначається стала C, що приводить до частинного розв'язку задачі. Дійсно, коли функція $f(x)$ неперервна, то (7.2) можна записати у вигляді:

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C.$$

Підставивши сюди $x = x_0$, матимемо $C = y(x_0) = y_0$. Отже, розв'язок рівняння (7.1) набирає вигляду:

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{7.3}$$

Відомо, що багато задач формулюється у вигляді різних рівнянь. Однак існують рівняння, до яких входять як самі невідомі функції, так і швидкості їх зміни, тобто похідні.

Приклад. Нехай матеріальна точка масою m рухається (падає) у середовищі вздовж вертикальної прямої під дією сили земного тяжіння. Треба знайти залежність шляху $x(t)$ і швидкості $v(t)$ від часу.

Розв'язок. Виходитимемо з другого закону Ньютона, за яким

$$m\frac{dv(t)}{dt} = F, \quad \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = a(t),$$

де $a(t)$ – прискорення. У середовищі $F = mg - F_{onip}$, де сила опору $F_{onip} \simeq \rho \cdot v(t)$, а ρ – густина середовища. Таким чином, для обчислення залежності швидкості руху $v(t)$ від часу дістаємо рівняння:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{\rho}{m}v(t),$$

а для обчислення шляху $x(t)$ – рівняння:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \rho - \frac{\rho}{m}\frac{dx(t)}{dt}.$$

Отже, маємо два суттєво різні диференціальні рівняння для обчислення $v(t)$ і $x(t)$.

Приклад. Розглянемо таку геометричну задачу. Відшукати криві, що мають властивість: пряма AM є дотичною до кривої у точці M і площа трапеції $OAMB$ є сталою, тобто $S_{OAMB} = S$ (рис.7.1).

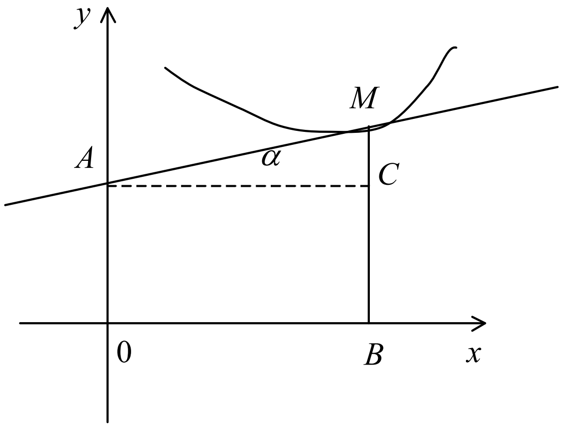

Рис. 7.1 – Трапеції з однаковою площею

Маємо $S = \frac{1}{2}\left(OA + BM\right) \cdot AC$. Очевидно, що $AC = OB = x$, тоді $BM = y$ і $OA = BM - CM = BM - AC \operatorname{tg}\alpha$. Враховуючи, що $\operatorname{tg}\alpha = y'$, маємо $OA = y - xy'$. В результаті для площі S дістаємо вираз $\frac{y - xy' + y}{2} x = S$, або

$$2xy - x^2 y' = 2S,$$

тобто знову маємо диференціальне рівняння.

Рівняння називається ***диференціальним***, якщо воно поряд з однією або декількома незалежними або залежними змінними містить також похідні за першими.

Розрізняють диференціальне рівняння з частинними похідними і звичайні, в залежності від того, чи містить рівняння частинні похідні, чи ні.

Звичайне диференціальне рівняння містить невідому функцію від однієї незалежної змінної, а також її похідні різних порядків.

Порядком звичайного диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, що міститься в ньому.

Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння і випускатимемо слово "звичайні".

В загальному вигляду диференціальне рівняння n-го порядку можна записати так:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \tag{7.4}$$

Розв'язком диференціального рівняння (7.4) називається всяка функція $y = f\left(x\right)$, яка при підстановці до (7.4) обертає рівняння (7.4) на тотожність.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (7.4) називається сукупність всіх його розв'язків. Загальний розв'язок, як правило, має явну залежність від незалежної змінної і містить n незалежних сталих:

$$y = \varphi\left(x, c_1, c_2, ..., c_n\right). \tag{7.5}$$

Загальним інтегралом диференціального рівняння (7.4) називається його загальний розв'язок у вигляді, який не розв'язаний відносно y, а саме:

$$\phi(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0. \qquad (7.6)$$

Частинним розв'язком диференціального рівняння (7.4) звуть розв'язок (7.5) або (7.6), в яких сталим $c_1, c_2, ..., c_n$ надано конкретні числові значення.

Зазначимо, що не існує єдиного метода розв'язання диференціальних рівнянь, розроблено лише деякі прийоми приведення до квадратур визначених видів диференціальних рівнянь. Деякі з них будуть розглянути в нашому курсі.

7.2 Диференціальні рівняння першого порядку і задача Коші

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (7.7)$$

якщо ж рівняння (7.7) можна розв'язати відносно y', то маємо рівняння:

$$y' = f(x, y). \qquad (7.8)$$

Враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, рівнянню (7.8) можна надати вигляд:

$$dy - f(x, y)dx = 0, \qquad (7.9)$$

що є частковим випадком рівняння:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dx = 0. \qquad (7.10)$$

Останній запис диференціального рівняння має ту перевагу, що змінні x і y в такому рівнянні рівноправні.

Розв'язком будь-якого з рівнянь (7.7)-(7.10) є загальний розв'язок:

$$y = \varphi(x, c), \qquad (7.11)$$

що містить одну сталу та являє собою інтегральну криву. Таким чином, загальному розв'язку диференціального рівняння (7.7) відповідає нескінченна множина інтегральних кривих і, отже, нескінченна множина частинних розв'язків.

Щоб відмітити конкретну інтегральну криву, потрібно задати точку (x_0, y_0) на площині, через яку повинна проходити крива.

Задача, в якій потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння (7.7)-(7.10) і який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, називається ***задачею Коші***.

В такому випадку значення c_0 можна обчислити з рівняння:

$$y_0 = \varphi(x_0, c_0),$$

значення якої і дає частинний розв'язок рівнянь (7.7)-(7.10).

Теорема (без доведення). Якщо в диференціальному рівнянні $y' = f(x, y)$ функції $f(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ неперервні в деякому околі точки (x_0, y_0), то задача Коші в околі цієї точки має єдиний розв'язок, який при $x = x_0$ дорівнює $y_0 = y(x_0)$.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \dfrac{3}{\cos^2 x}$ з початковою умовою $y(0) = 3$ (тут $x_0 = 0$, $y_0 = 3$). Маємо загальний розв'язок:

$$y(x)=\int\frac{3dx}{\cos^2 x}=3\operatorname{tg}x+C\ .$$

Враховуємо початкову умову:

$$y(0)=3=3\operatorname{tg}0+C\ ,$$

$$C=3\,.$$

Отже, дістанемо розв'язок задачі Коші $y=3\operatorname{tg}x+3$.

7.3 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Якщо диференціальне рівняння (7.7)-(7.10) не містить явно змінну x, або y, то воно називається ***неповним***.

Розглянемо методи інтегрування таких диференціальних рівнянь.

1. Нехай в рівнянні (7.8) немає змінної y. Тоді маємо $y'=f(x)$ або $dy=f(x)dx$, відкіля негайно дістаємо загальний розв'язок:

$$y=\int f(x)dx+C\,.$$

Таким чином, в цьому випадку маємо фактично задачу про обчислення первісної.

2. Нехай в рівнянні (7.8) немає змінної x. Тоді знову виникає задача про первісну. Дійсно, припустимо, що на деякому інтервалі $[c,d]$ змінної y функція $f(y)$ в рівнянні $y'=f(y)$ задовольняє нерівності $f(y)\neq 0$. Тоді $dy=f(y)dx$, або $dx=\dfrac{dy}{f(y)}$ і, отже, дістаємо загальний розв'язок:

$$x=\int\frac{dy}{f(y)}+C\,. \qquad (7.12)$$

Розглянемо тепер випадок, коли неперервна функція $f(y)$ при деякому $y_0\in[c,d]$ дорівнює нулю. Вважаючи $y=y_0$ функцією від x, безпосередньою підстановкою переконуємося, що функція $y=y_0$ є розв'язком рівняння $y'=f(y)$. Отже, крім розв'язку (7.12), рівняння $y'=f(y)$ має ще розв'язок $y=y_0$, де y_0 є коренем рівняння $f(y)=0$. Геометрично такі розв'язки є прямими, що паралельні осі Ox. Якщо через точки прямої $y=y_0$ проходить тільки одна інтегральна крива, а саме $y=y_0$, то $y=y_0$ звуть частинним розв'язком диференціального рівняння $y'=f(y)$. Якщо через пряму $y=y_0$ проходить принаймні ще одна інтегральна крива, то розв'язок $y=y_0$ звуть ***особливим розв'язком***, тому що порушується умова єдності розв'язку.

Приклад. Рівняння $y'=\sqrt{y}$ є рівнянням типу (7.8) з правою частиною $f(x,y)=\sqrt{y}$, яка визначена і неперервна $\forall y\geq 0$. Однак частинна похідна $f_y'(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ необмежена при $y\to 0$ (має розрив другого роду), що порушує умови теореми. Досліджуване рівняння має загальний розв'язок:

$$y=\frac{(x+c)^2}{4}. \quad (7.13)$$

Безпосередньо впевнюємося, що функція $y=0$ є також розв'язком рівняння. Отже, через кожну точку осі Ox (де $y=0$) проходить принаймні дві інтегральні криві: $y=0$ і сім'я кривих (7.13) (при $x=-c$). Тому розв'язок $y=0$ є особливим.

Диференціальне рівняння називають диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо це рівняння має вигляд:

$$g_1(x)h_1(y)dx+g_2(x)h_2(y)dy=0. \quad (7.14)$$

Рівняння (7.14) можна представити й інакше. Припускаючи, що $h_1(y)\neq 0$ і $g_2(x)\neq 0$, поділимо обидві сторони рівняння (7.14) на $h_1(y)\cdot g_2(x)$ і дістанемо:

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}dx+\frac{h_2(y)}{h_1(y)}dy=0.$$

Позначаючи $f_1(x)=-\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ і $f_2(y)=\frac{h_1(y)}{h_2(y)}$, матимемо:

$$y'=f_1(x)f_2(y). \quad (7.15)$$

Отже, записи диференціальних рівнянь (7.14) і (7.15) еквівалентні. Знайдемо загальний розв'язок рівняння (7.15), для чого запишемо його у вигляді:

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx \quad (7.16)$$

Якщо диференціальне рівняння зображено виразом (7.16), то кажуть, що змінні в ньому ***відокремлені***. Інтегруючи почленно, дістаємо загальний розв'язок:

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C. \quad (7.17)$$

Якщо функція $f_2(y)$ при деяких значеннях y_0 дорівнює нулю, $f(y)=0$, то, крім загального інтеграла (7.17), рівняння (7.16) має ще розв'язок $y=y_0$, який може задовольняти (7.16).

Зазначимо, що розглянуті вище випадки 1 і 2 є частинними випадками рівняння з відокремлюваними змінними.

7.4 Однорідні диференціальні рівняння

Функція $f(x,y)$ називається ***однорідною*** (відносно змінних x, y) виміру n, якщо ця функція для будь-якого числа $t\neq 0$ задовольняє рівності:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

Число n називають також показником однорідності функції.

Приклад. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Тоді

$f\left(tx,ty\right)=\sqrt[3]{t^3x^3+t^3y^3}=t\sqrt[3]{x^3+y^3}=t\cdot f\left(x,y\right)\Rightarrow n=1$.

Приклад. $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$. Тоді

$f\left(tx,ty\right)=\dfrac{t^2x^2+t^2y^2}{tx\cdot ty}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=f\left(x,y\right)\Rightarrow n=0$.

Диференціальне рівняння $y'=f\left(x,y\right)$ називається ***однорідним***, якщо функція $f\left(x,y\right)$ є однорідною функцією нульового виміру ($n=0$).

Однорідне диференціальне рівняння можна подати у вигляді:

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7.18}$$

Дійсно, оскільки $f\left(tx,ty\right)=f\left(x,y\right)$, то візьмемо за $t=\dfrac{1}{x}$:

$$f\left(x,y\right)=f\left(tx,ty\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

В однорідному диференціальному рівнянні (7.18) змінні, взагалі кажучи не відокремлюються. Однак його можна перетворити на рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінних:

$$y=x\cdot u\left(x\right) \tag{7.19}$$

Враховуючи, що $y'=u\left(x\right)+x\cdot u'\left(x\right)$, і підставляючи (7.19) в (7.18), дістанемо:

$$u+xu'=\varphi\left(u\right),$$

$$xu'=\varphi\left(u\right)-u,$$

$$\frac{du}{\varphi\left(u\right)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, матимемо:

$$\ln\left|x\right|=\int\frac{du}{\varphi\left(u\right)-u}+C. \tag{7.20}$$

Обчисливши інтеграл і підставивши до нього значення $u=\dfrac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (7.18). Тут також треба врахувати, що можуть бути особливі розв'язки, які задовольняють рівнянню:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}=0.$$

Приклад. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$. Для функції $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ маємо $n=0$ (попередній приклад). Нехай $y=x\cdot u$. Тоді маємо

$$u + xu' = \frac{1+u^2}{u},$$

$$xu' = \frac{1}{u},$$

$$udu = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C,$$

$$u = \pm\sqrt{2\left(C + \ln|x|\right)},$$

$$y = \pm x\sqrt{2\left(C + \ln|x|\right)}.$$

Це і є загальним розв'язком рівняння.

Диференціальне рівняння

$$P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy = 0 \tag{7.21}$$

називається ***однорідним***, коли функції $P\left(x, y\right)$ і $Q\left(x, y\right)$ є однорідними функціями однакового виміру. В такому випадку рівняння (7.21) зводиться до рівняння (7.18). Дійсно, нехай $P\left(tx, ty\right) = t^n P\left(x, y\right)$ і $Q\left(tx, ty\right) = t^n Q\left(x, y\right)$. Тоді рівнянню (7.21) можна надати вигляд:

$$y' = f\left(x, y\right), \text{ де } f\left(x, y\right) = -\frac{P\left(x, y\right)}{Q\left(x, y\right)}$$

є однорідною функцією виміру $n = 0$. Отже, розв'язок рівняння (7.21) зведено до попереднього.

Диференціальне рівняння

$$y' = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{7.22}$$

також можна звести до однорідного за допомогою пересування початку координат до точки, де перетинаються прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, яка визначається розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1, \\ a_2x + b_2y = -c_2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо деякі x_0, y_0 і зробимо заміну змінних $u = x - x_0$ і $v = y - y_0$ так, що $y'_x = v'_u$. В результаті рівняння (7.22) приведемо до вигляду:

$$v' = F\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right),$$

а це рівняння є вже однорідним.

Якщо прямі не перетинаються, то в такому випадку ці прямі паралельні. Використовуючи умову паралельності двох прямих $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$, маємо $a_1x+b_1y=\frac{b_1}{b_2}a_2x+b_1y=\frac{b_1}{b_2}\left(a_2x+b_2y\right)$. Таким чином зводимо рівняння (7.22) до вигляду:

$$y'=F\left(ax+by\right),$$

для якого заміною змінних $u=ax+by$, $y'=\frac{u'}{b}-\frac{a}{b}$ дістаємо однорідне диференціальне рівняння $u'-a=bF\left(u\right)$.

Деякі диференціальні рівняння першого порядку можна привести до однорідних заміною $y=u^{\alpha}$, де α – невідома стала. Щоб відшукати α зробимо заміну $y=u^{\alpha}$. З умови, щоб диференціальне рівняння, яке дістаємо у результаті такої заміни було однорідним, знайдемо α (якщо це можливо).

Приклад. Дано рівняння $2x^4yy'+y^4=4x^6$. Зробимо заміну $y=u^{\alpha}$. Отже $y'=\alpha u^{\alpha-1}u'$, і підставляючи в рівняння маємо:

$$2\alpha x^4u^{\alpha}u^{\alpha-1}u'+u^{4\alpha}=4x^6.$$

Останнє рівняння буде однорідним, коли степені його членів дорівнюють один одному:

$$4+\alpha+\left(\alpha-1\right)=4\alpha=6,$$

$$\alpha=\frac{3}{2}.$$

Проводимо заміну $y=u^{\frac{3}{2}}$ і дістаємо:

$$3x^4u^2u'+u^6=4x^6.$$

Далі, як звичайно, здійснюємо заміну $u=x\cdot v$ і маємо:

$$3x^4x^2v^2\left(v+xv'\right)+x^6v^6=4x^6,$$

$$3v^3+3xv^2v'=4-v^6,$$

$$3xv^2v'=4-v^6-3v^3.$$

Ми отримали рівняння із змінними, що відокремлюються:

$$\frac{v^2dv}{4-v^6-3v^3}=\frac{dx}{3x}.$$

Пропонується самостійно знайти розв'язок цього рівняння.

7.5 Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна подати у вигляді:

$$y'+a\left(x\right)y=f\left(x\right), \tag{7.23}$$

де $a(x)$, $f(x)$ є відомими неперервними функціями змінної x.

Якщо $f(x)=0$, то рівняння (7.23) називається ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням*** (ЛОДР).

Доведемо, що інтегрування рівняння (7.23) можна звести до інтегрування двох диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними.

Для цього шукатимемо розв'язок рівняння (7.23) у вигляді:

$$y=u(x)v(x). \tag{7.24}$$

Тоді (спускаючи для спрощення запису змінну x в $u(x)$ і $v(x)$) $y'=u'v+uv'$ і рівняння (7.23) набирає вигляду:

$$u'v+v'u+a(x)uv=f(x),$$

$$v'u+v\left[u'+a(x)u\right]=f(x). \tag{7.25}$$

Оскільки замість однієї невідомої функції y введено дві нові u і v, то можна використати довільну умову для визначення однієї з них. Отже, виберемо $u(x)$ так, щоб у рівнянні (7.25) вираз у квадратних дужках дорівнював нулю. Тоді дістаємо два рівняння:

$$u'+a(x)u=0,$$

$$uv'=f(x). \tag{7.26}$$

Інакше кажучи, за функцію $u(x)$ беремо один з частинних розв'язків ЛОДР. Рівняння (7.26) є рівнянням з відокремлюваними змінними і тому

$$\frac{du}{u}=-a(x)dx,$$

$$\ln|u|=-\int a(x)dx+c_1,$$

$$|u|=e^{c_1}e^{-\int a(x)dx}$$

$$u=\pm e^{c_1}e^{-\int a(x)dx}.$$

Надавши $c=\pm e^{c_1}=1$, дістанемо:

$$u(x)=e^{-\int a(x)dx}. \tag{7.27}$$

Для рівняння (7.26) матимемо:

$$\frac{dv}{dx}u(x)=f(x)\Rightarrow dv=\frac{f(x)}{u(x)}dx.$$

Підставляючи сюди $u(x)$ з (7.27), дістаємо:

$$dv=f(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

$$v(x)=\int f(x)e^{\int a(x)dx}dx+c.$$

Таким чином, остаточно знаходимо розв'язок диференціального рівняння (7.23):

$$y(x)=e^{-\int a(x)dx}\left[c+\int f(x)e^{\int a(x)dx}dx\right]. \qquad (7.28)$$

Зазначимо, що такий метод інтегрування диференціального рівняння (7.23) має ще назву ***метод варіації довільної сталої***.

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=x\sqrt{x^2+1}$. Нехай $y=u\cdot v$. Тоді

$$u'v+uv'-\frac{2x}{1+x^2}uv=x\sqrt{x^2+1},$$

$$u'-\frac{2x}{1+x^2}u=0,$$

$$\frac{du}{u}=\frac{2xdx}{1+x^2},$$

$$\ln|u|=\ln\left(1+x^2\right),$$

$$u=1+x^2.$$

В результаті для v дістаємо рівняння: $\left(1+x^2\right)v'=x\sqrt{1+x^2}$,

$$dv=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$v=\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+c=\sqrt{1+x^2}+c.$$

Остаточно, $y=\left(1+x^2\right)\left[\sqrt{1+x^2}+c\right]$.

7.6 Рівняння Бернуллі

Узагальненням рівняння (7.23) є диференціальне рівняння Бернуллі, яке запишемо у вигляді:

$$y'-A(x)y+B(x)y^n=0,\ n\neq 0,\ n\neq 1. \qquad (7.29)$$

Тут $n\neq 0$ і $n\neq 1$, оскільки при $n=0$ дістаємо рівняння (7.23), а при $n=1$ дістаємо так само (7.23), але з $f(x)=0$. Надалі припускатимемо, що n – довільна стала ($n\neq 0$ і $n\neq 1$), а також, що $y\neq 0$. Помноживши обидві частини рівняння (7.29) на y^{-n}, дістанемо

$$y^{-n}y'-A(x)y^{1-n}+B(x)=0.$$

Зробимо заміну змінної:

$$u=y^{1-n} \text{ і } u'=(1-n)y^{-n}y'\Rightarrow y^{-n}y'=\frac{1}{1-n}u'.$$

Отже

$$\frac{1}{1-n}u'+A(x)u+B(x)=0.$$

Помножуючи на $(1-n)$, дістаємо рівняння типу (7.23), тобто

$$u' + a(x)u = f(x),$$

де $u(x) = (1-n)B(x)$, $f(x) = -(1-n)B(x)$.

Таким чином, заміною змінної $u = y^{1-n}$ інтегрування рівняння Бернуллі зводиться до розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку. Визначивши з нього функцію u, знайдемо розв'язок $y = u^{\frac{1}{1-n}}$.

7.7 Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Згадаємо поняття повного диференціала функції двох змінних $F = F(x, y)$:

$$dF = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy . \tag{7.30}$$

При цьому для других мішаних частинних похідних необхідно справджується рівність (за умови їх неперервності):

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} . \tag{7.31}$$

Таким чином, позначаючи

$$M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \text{ і } N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y},$$

перепишемо (7.30) у вигляді:

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

а з рівності (7.31) випливає:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} . \tag{7.32}$$

А тепер розглянемо диференціальне рівняння:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 . \tag{7.33}$$

Припустимо, що функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ і $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ є неперервними функціями в деякій області зміни змінних x і y. Якщо ліва частина рівняння (7.33) є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто якщо

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

то рівняння (7.33) звуть ***рівнянням у повних диференціалах***. Воно має вигляд:

$$du(x,y) = 0,$$

його загальний інтеграл є

$$u(x,y)=C. \tag{7.34}$$

Отже, щоб розв'язати рівняння (7.33), необхідно знайти функцію $u(x,y)$ і дорівняти її до сталої C (згідно з (7.34)). Але для того, щоб ліва частина (7.33) була повним диференціалом необхідно і достатньо, щоб справджувалася рівність:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

згідно з рівнянням (7.32). Оскільки в цьому випадку

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y) \text{ і } \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y),$$

то розглянемо перше з цих рівнянь:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y). \tag{7.35}$$

В цьому рівнянні змінну y слід розглядати як сталу, як параметр. Тоді рівняння (7.35) можна проінтегрувати за x:

$$u(x,y)=\int P(x,y)\,dx+C. \tag{7.36}$$

Але оскільки в (7.35) вважаємо y за параметр, то й стала C в (7.36) може залежати від y, тобто (7.36) треба писати у вигляді:

$$u(x,y)=\int P(x,y)\,dx+C(y). \tag{7.37}$$

Дійсно, частинна похідна від виразу (7.37) за змінною x якраз дорівнює (7.35). А тепер обчислюємо частинну похідну від виразу (7.37) за змінною y. Матимемо

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)=\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx+C'(y),$$

або у вигляді

$$C'(y)=Q(x,y)-\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx,$$

вважаючи тут x за параметр. Останнє рівняння для функції $C(y)$ має розв'язок:

$$C(y)=\int\left[Q(x,y)-\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\right]dy+C. \tag{7.38}$$

Отже, за шукану функцію $u(x,y)$ можна взяти функцію $u(x,y)$ з виразу (7.37) з врахуванням (7.38) при $C=0$. Тоді загальний інтеграл рівняння (7.33) має вигляд:

$$\int P(x,y)\,dx+\int\left[Q(x,y)-\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\right]dy=C.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $\left(2x+3x^2y\right)dx+\left(x^3-3y^2\right)dy=0$. Спочатку перевіримо, що виконується рівність (7.32):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+3x^2y\right)=3x^2,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3-3y^2\right)=3x^2.$$

Отже, рівняння, що розглядається, є рівнянням у повних диференціалах. Шукаємо функцію $u\left(x,y\right)$, повний диференціал якої

$$du\left(x,y\right)=\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}dy$$

дорівнює лівій частині вихідного рівняння, а значить справджується

$$\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial x}=2x+3x^2y,\ \frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}=x^3-3y^2.$$

Обчислимо інтеграл від першої рівності, вважаючи y сталою:

$$u\left(x,y\right)=\int\left(2x+3x^2y\right)dx=x^2+x^3y+C\left(y\right).$$

Підставляючи цей вираз у другу рівність, матимемо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+x^3y+C\left(y\right)\right]=x^3-3y^2,$$

$$x^3+C'\left(y\right)=x^3-3y^2,$$

$$C'\left(y\right)=-3y^2,$$

$$C\left(y\right)=y^3.$$

Отже, за $u\left(x,y\right)$ можна взяти функцію:

$$u\left(x,y\right)=x^2+x^3y-y^3.$$

Загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння є тоді

$$x^2+x^3y-y^3=C.$$

Контрольні запитання і задачі до розділу 7

1. Дайте визначення диференціального рівняння.
2. Що є розв’язком диференціального рівняння?
3. Що таке загальний та частинний розв’язок диференціального рівняння?
4. Що таке задача Коші?
5. Інтегрування диференціальних рівнянь методом відокремлювання змінних.
6. Однорідні диференціальні рівняння.
7. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.
8. Знайдіть загальний розв’язок рівняння $\left(x^2+1\right)y'-2xy^3=0$.
9. Розв’язати рівняння $xy'-y=xtg\frac{y}{x}$.
10. Розв’язати рівняння $y'+2y=4x$.
11. Наведіть загальний вигляд рівняння Бернуллі.

РОЗДІЛ 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

8.1 Диференціальні рівняння другого порядку. Задача Коші

Диференціальним рівнянням другого порядку називають рівняння

$$F\left(x, y, y', y''\right)=0 \tag{8.1}$$

або рівняння

$$y''=f\left(x, y, y'\right). \tag{8.1a}$$

Таким чином, диференціальне рівняння другого порядку зв'язує незалежну змінну, шукану функцію y та її першу і другу похідні. В окремих випадках в (8.1) або (8.1a) можуть бути відсутні або x, або y, або y', проте y'' має обов'язково бути.

Диференціальне рівняння другого порядку може мати загальний і частинний розв'язки.

Приклад. Розглянемо просте рівняння другого порядку $y''=2$.

Маємо $\dfrac{dy'}{dx}=2 \Rightarrow dy'=2dx \Rightarrow y'=2x+C_1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=2x+C_1 \Rightarrow dy=\left(2x+C_1\right)dx$,

$$y=x^2+C_1x+C_2.$$

Отже, знайдено загальний розв'язок рівняння, який містить дві сталі C_1 і C_2. Геометричним змістом такого розв'язку є сім'я парабол.

Загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку має дві сталі і являє собою сім'ю кривих. Щоб виділити із загального розв'язку частинний розв'язок, треба визначити дві сталі C_1 і C_2, для чого необхідно, очевидно, задати дві початкові умови:

$$\left.y\right|_{x=x_0}=y\left(x_0\right)=y_0,\ \left.y'\right|_{x=x_0}=y'\left(x_0\right)=y_0'. \tag{8.2}$$

Приклад. Нехай у попередньому прикладі задано початкові умови: $y(1)=2$, $y'(1)=1$. Тут $x_0=1$, $y_0=2$, $y_0'=1$. Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} 2=1+C_1+C_2 \\ 1=2+C_1 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо $C_1=-1$ і $C_2=2$. Тоді частинний розв'язок має вигляд:

$$y=x^2-x+2.$$

<u>Теорема Коші</u> (про існування та єдність розв'язку). Нехай в рівнянні (8.1a) функції $f\left(x, y, y'\right)$, $f_y'\left(x, y, y'\right)$ і $f_{y'}'\left(x, y, y'\right)$ визначені і неперервні функції в деякій множині G змінних x, y, y'. Тоді яка б не була точка $\left(x_0, y_0, y_0'\right)\in G$, диференціальне рівняння (8.1a) має єдиний розв'язок, який задовольняє початковим умовам (8.2).

Задача знаходження розв'язку рівняння (8.1a) (або (8.1)) з умовами (8.2) зветься задачею Коші.

Отже, загальний розв'язок рівняння (8.1) (або (8.1a)) є

$$y=\varphi\left(x, C_1, C_2\right) \tag{8.3}$$

Всякий розв'язок $y=\varphi\left(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}\right)$, який дістаємо з (8.3) при конкретних значеннях $C_1=C_1^{(0)}$ і $C_2=C_2^{(0)}$, зветься частинним розв'язком.

Якщо маємо загальний розв'язок (8.3) і початкові умови (8.2), то сталі C_1 і C_2 можна обчислити з системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_0=\varphi\left(x_0, C_1, C_2\right) \\ y_0'=\varphi'\left(x_0, C_1, C_2\right). \end{cases}$$

8.2 Інтегрування деяких рівнянь шляхом зниження порядку

Розглянемо деякі прості диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку, на прикладі диференціальних рівнянь другого порядку.

1. Нехай в рівнянні (8.1а) функція $f\left(x, y, y'\right)$ не залежить від y і y'. Тоді маємо рівняння

$$y''=f(x) \tag{8.4}$$

Рівняння такого типу вже розглядалося в попередньому підрозділі. Введемо нову функцію $z(x)$ таку, що $y'=z(x)$. Тоді $y''=z'(x)$ і $z'(x)=f(x)$. Відкіля

$$z(x)=\int f(x)\,dx=F(x)+C_1,$$

де $F(x)$ є первісною для $f(x)$. Підставляючи $z(x)=y'$ й інтегруючи ще раз, дістаємо

$$y=\int F(x)\,dx+C_1x+C_2.$$

2. Нехай функція $f\left(x, y, y'\right)$ рівняння (8.1а) не містить змінну y. Тоді маємо рівняння

$$y''=f\left(x, y'\right). \tag{8.5}$$

Як і в попередньому випадку, введемо $y'=z(x)$ і тоді рівняння (8.5) запишемо у вигляді:

$$z'(x)=f\left(x, z(x)\right),$$

яке є рівнянням першого порядку. Припустимо, що його можна проінтегрувати і знайти загальний розв'язок:

$$z=z\left(x, C_1\right).$$

Враховуючи, що $y'(x)=z(x)$, дістаємо

$$y'=z\left(x, C_1\right),$$

відкіля

$$y=\int z\left(x, C_1\right)dx+C_2.$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння $\left(1-x^2\right)y''-xy'=0$, яке не містить явно невідому функцію. Нехай $y'=z$, тоді $y''=z'$ і рівняння перетворюється на таке:

$$\left(1-x^2\right)z'-xz=0, \qquad \frac{dz}{z}=\frac{x}{1-x^2}dx, \qquad \ln|z|=-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+\ln C_1, \qquad z=\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тепер, підставляючи y' замість z, дістаємо $y' = \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow dy = \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

$$y = C_1 \arcsin x + C_2 .$$

3. Нехай в рівнянні (8.1а) відсутня змінна x, тобто воно має вигляд:

$$y'' = f\left(y, y'\right). \tag{8.6}$$

Введемо нову функцію $y' = z\left(y\right)$, в якій за незалежну змінну беремо y. Тоді $y'' = z'\left(y\right)y' = z'\left(y\right)z\left(y\right)$ і рівняння (8.6) набирає вигляду:

$$\frac{dz}{dy}z\left(y\right) = f\left(y, z\left(y\right)\right).$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Припустимо, що його можна проінтегрувати і знайти загальний розв'язок $z = z\left(y, C_1\right)$. Тоді маємо рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = z\left(y, C_1\right) \Rightarrow \frac{dy}{z\left(y, C_1\right)} = dx \Rightarrow x = \int \frac{dy}{z\left(y, C_1\right)} + C_2 .$$

Приклад. Розглянемо рівняння $y''\left(1+y\right) = \left(y'\right)^2 + y'$, яке не містить явно змінну x. Нехай $y' = z\left(y\right)$ і $y'' = z'\left(y\right)z\left(y\right) = z'z$. Таким чином,

$$z'z\left(1+y\right) = z^2 + z \Rightarrow \frac{zdz}{z^2+z} = \frac{dy}{1+y} \Rightarrow \ln\left|1+z\right| = \ln\left|1+y\right| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$z+1 = C_1\left(y+1\right) \Rightarrow z = C_1\left(y+1\right)-1 \Rightarrow y' = C_1\left(1+y\right)-1 \Rightarrow \frac{dy}{C_1\left(1+y\right)-1} = dx \Rightarrow$$

$$x = \int \frac{dy}{C_1\left(1+y\right)-1} \Rightarrow x = \frac{1}{C_1}\ln\left|C_1\left(1+y\right)-1\right| - C_2 \Rightarrow C_1x + C_2 = \ln\left|C_1\left(1+y\right)-1\right|,$$

тобто ми знайшли загальний інтеграл.

8.3 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Важливим класом диференціальних рівнянь взагалі й, зокрема, диференціальних рівнянь другого порядку є лінійні диференціальні рівняння, до розгляду яких й переходимо. Лінійні диференціальні рівняння мають особливе значення тому, що більшість задач фізики і техніки приводять до розв'язку диференціальних рівнянь, в які шукана функція входить лінійно.

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку зв'язує змінні x і y та має вигляд:

$$a_0\left(x\right)y'' + a_1\left(x\right)y' + a_2\left(x\right)y = b\left(x\right), \tag{8.7}$$

де $a_0\left(x\right)$, $a_1\left(x\right)$, $a_2\left(x\right)$ і $b\left(x\right)$ є відомі функції від x, причому припускають, що $a_0\left(x\right) \neq 0$.

<u>Теорема</u> (типу Коші). Якщо функції $a_0\left(x\right)$, $a_1\left(x\right)$, $a_2\left(x\right)$ і $b\left(x\right)$ в (8.7)

неперервні на інтервалі (a,b), причому $\forall x\in(a,b)$: $a_0(x)\neq 0$, то при будь-яких початкових умовах $y(x_0)=y_0$ і $y'(x_0)=y_0'$, де $x_0\in(a,b)$, існує єдиний розв'язок рівняння (8.7), що задовольняє даним початковим умовам.

Цю теорему дамо без доведення.

Якщо $b(x)=0$ в (8.7), то рівняння

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{8.8}$$

зветься лінійним однорідним диференціальним рівнянням (***ЛОДР***) другого порядку.

Очевидний розв'язок $y(x)=0$ рівняння (8.8) зветься його ***нульовим*** або ***тривіальним*** розв'язком.

Теорема (принцип суперпозиції, принцип накладення). Якщо $y_1=y_1(x)$ і $y_2=y_2(x)$ є розв'язки ЛОДР (8.8), то

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{8.9}$$

також є розв'язком цього рівняння при будь-яких значеннях сталих c_1 і c_2, тобто лінійна комбінація (8.9) розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ задовольняє рівнянню (8.8).

Доведення цієї теореми здійснюється безпосередньою підстановкою виразу (8.9) до рівняння (8.8) з врахуванням того, що функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ задовольняють (8.8).

З теореми випливає, що розв'язки ЛОДР (8.8) можна множити на довільні сталі і додавати їх, дістаючи знову розв'язок рівняння (8.8).

Два розв'язки y_1 і y_2 рівняння (8.8) звуть ***лінійно залежними***, якщо між ними існує тотожна відносно змінної x рівність

$$\lambda_1y_1(x)+\lambda_2y_2(x)=0, \tag{8.10}$$

з сталими $\lambda_1\neq 0$ і $\lambda_2\neq 0$. Інакше, розв'язки y_1 і y_2 є ***лінійно незалежними***, коли рівність (8.10) справджується тільки при $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Коли функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні, то, очевидно, що між ними існує лінійний зв'язок:

$$y_2(x)=ky_1(x).$$

Значить $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}=k$, де k – стала, й отже

$$\frac{d}{dx}\frac{y_2(x)}{y_1(x)}=\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=0.$$

Введемо до розгляду ***детермінант Вронського*** (за ім'ям польського математика Ю. Гене-Вронського (1775-1853)), або ***вронськіан***:

$$W=W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix} \tag{8.11}$$

розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (8.8).

Таким чином, лінійна залежність розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (8.8) еквівалентна рівності нулю детермінанта Вронського $\forall x \in (a,b)$.

8.4 Формула Ліувілля-Остроградського

Розглянемо два довільні частинні розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (8.8). Кажуть, що вони створюють ***фундаментальну систему*** розв'язків на інтервалі (a,b), якщо вони лінійно незалежні $\forall x \in (a,b)$, або, інакше, якщо їх вронськіан відрізняється від нуля у довільній точці інтервалу (a,b). Таким чином, щоб встановити фундаментальність розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (8.8), необхідно обчислити їх вронськіан і подивитися, чи дорівнює він нулю, чи ні у довільній точці $x_0 \in (a,b)$. Звичайно, перебирати всі точки, що належать інтервалу (a,b), а їх нескінченна і навіть незчисленна множина, не можливо. Тому застосовують одну чудову властивість вронськіана, яка зветься формулою Ліувілля-Остроградського.

Доведемо, що вронськіан можна подати у вигляді:

$$W \equiv W(y_1, y_2) \equiv W(x_0) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \tag{8.12}$$

(формула Ліувілля-Остроградського). Дійсно, обчислимо похідну від вронськіана (8.11):

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}(y_1 y_2' - y_2 y_1') = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

Але функції y_1 і y_2 задовольняють рівнянню (8.8) і тому

$$y_1'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_1' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y_1 = 0,$$

$$y_2'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_2' + \frac{a_2(x)}{a_1(x)} y_2 = 0.$$

Помножимо перше рівняння на y_2, а друге на y_1. Тоді, віднімаючи від другого рівняння перше, дістанемо

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0,$$

або, враховуючи явний вигляд $W(x)$ і $\dfrac{dW(x)}{dx}$,

$$\frac{dW}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} W = 0 \Rightarrow \frac{dW}{W} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx.$$

Інтегруючи останню рівність за x в межах від x_0 до x, матимемо

$$\ln W \Big|_{x_0}^{x} = -\int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx,$$

відкіля негайно дістаємо формулу (8.12):

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Оскільки другий множник у формулі Ліувілля-Остроградського (8.12), а саме $e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$, ніколи не обертається на нуль, то вронськіан (8.11) дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли дорівнює нулю вронськіан:

$$W(x_0)=W\left(y_1^{(0)},y_2^{(0)}\right)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix}, \tag{8.13}$$

для будь-якого $x_0\in(a,b)$.

Таким чином, щоб визначити, що розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ створюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (8.8) на інтервалі (a,b), тобто що вони є лінійно незалежні, достатньо обчислити вронськіан (8.13) у будь-якій точці $x_0\in(a,b)$ і впевнитися, що він відрізняється від нуля. Якщо ж вронськіан (8.13) дорівнює нулю хоча б в одній точці інтервалу (a,b), то розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є лінійно залежними і тому не створюють фундаментальну систему.

8.5 Структура загального розв'язку ЛОДР

<u>Теорема</u> (про структуру загального розв'язку ЛОДР). Якщо $y_1=y_1(x)$ і $y_2=y_2(x)$ створюють на інтервалі (a,b) фундаментальну систему частинних розв'язків, то загальний розв'язок ЛОДР (8.8) має вигляд:

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x). \tag{8.14}$$

<u>Доведення</u>. Внаслідок принципу суперпозиції, очевидно, що вираз (8.14) є розв'язком рівняння (8.8). Щоб пересвідчитися, що (8.14) є загальним розв'язком рівняння (8.8), необхідно показати, що з нього можна виділити єдиний частинний розв'язок, який задовольняє згідно з теоремою Коші будь-якій початковій умові.

$$y_0=y(x_0)\ \text{і}\ y_0'=y'(x_0)\quad \forall x_0\in(a,b).$$

Підставляючи в (8.14) ці початкові умови, дістанемо систему двох рівнянь з двома невідомими c_1 і c_2, а саме:

$$\begin{cases} y_0=c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0),\\ y_0'=c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0).\end{cases}$$

Ось де проявляється лінійна незалежність y_1 і y_2. Дійсно, щоб система мала єдиний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її детермінант

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix}$$

відрізнявся від нуля. А вронськіан $W\left(x_0\right) \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли y_1 і y_2 є лінійно незалежними.

8.6 ЛОДР із сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння

Перейдемо до розгляду ЛОДР другого порядку, коли коефіцієнти рівняння (8.8) сталі, тобто є даними числами. Припускаючи, як і раніше, що $a_0 \neq 0$, надамо ЛОДР (8.8) із сталими коефіцієнтами вигляд:

$$y'' + py' + qy = 0 . \tag{8.15}$$

Зазначимо, що рівняння (8.15) не містить в явному виді змінної x, і тому його можна проінтегрувати методом зниження порядку (див. попередні підрозділи). Проте, для розв'язування (8.15) розробимо інший загальний метод і покажемо, як відшукати загальний розв'язок рівняння (8.15) у вигляді (8.14), тобто як можна знайти розв'язки $y_1\left(x\right)$ і $y_2\left(x\right)$.

Шукатимемо розв'язок рівняння (8.15) у вигляді

$$y = e^{kx} ,$$

де k – деяке, поки-що невідоме число. Підставляючи цю функцію в рівняння (8.15) дістанемо

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0 .$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то знаходимо

$$k^2 + pk + q = 0 . \tag{8.16}$$

Це алгебраїчне квадратне рівняння відносно k визначає ті значення k, за якими функція $y = e^{kx}$ є розв'язком рівняння (8.15). Воно називається ***характеристичним рівнянням*** ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Квадратне рівняння (8.16) завжди має два корені. При цьому відносно значень коренів можливі такі три випадки: корені дійсні і різні, корені дійсні і рівні, корені комплексні.

Розглянемо кожний з цих випадків окремо.

1. Нехай корені k_1 і k_2 рівняння (8.16) дійсні і $k_1 \neq k_2$. В цьому разі знаходимо два частинні розв'язки:

$$y_1 = e^{k_1 x} ,\ y_2 = e^{k_2 x} .$$

Оскільки вронськіан (8.11) цих розв'язків $W = \left(k_2 - k_1\right)e^{\left(k_1 + k_2\right)x} \neq 0$ (оскільки $k_1 \neq k_2$), то y_1 і y_2 створюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (8.15). Отже загальний розв'язок рівняння (8.15) згідно з (8.14) має вигляд:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} . \tag{8.17}$$

2. Нехай корені рівняння дійсні і $k_1 = k_2$. У такому разі вронськіан розв'язків $e^{k_1 x}$ і $e^{k_2 x}$ дорівнює нулю, і тому вони не створюють фундаментальну систему. Отже маємо тільки один частинний розв'язок $y_1 = e^{k_1 x}$. Для пошуку другого розв'язку скористаємося

принципом суперпозиції і таким штучним прийомом. Припустимо, що $k_2 = k_1 + \varepsilon$, де ε – деяке мале число, тобто вважатимемо, що корені k_1 і k_2 мало відрізняються між собою. Тоді в силі принципу суперпозиції функція

$$y = \frac{1}{k_2 - k_1}\left(e^{k_2 x} - e^{k_1 x}\right)$$

також буде розв'язком рівняння (8.15). Враховуючи, що $k_2 = k_1 + \varepsilon$ і переходячи до границі $\varepsilon \to 0$, матимемо

$$y = e^{k_1 x}\frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} y = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{k_1 x}\frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} = e^{k_1 x}\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} = x e^{k_1 x}.$$

Таким чином дістаємо фундаментальну систему розв'язків

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = x e^{k_1 x},$$

вронськіан якої, як можна впевнитися, $W = e^{2k_1 x} \neq 0$. Отже у цьому випадку загальний розв'язок рівняння (8.15) є

$$y = \left(c_1 + c_2 x\right)e^{k_1 x}. \tag{8.18}$$

3. Якщо дискримінант $p^2 - 4q$ характеристичного рівняння (8.16) є від'ємне число, то його корені є комплексними, причому обов'язково комплексно спряжені, тобто $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, де α і β є дійсні числа, а $i = \sqrt{-1}$. У такому випадку частинні розв'язки рівняння (8.15)

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \text{ і } y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} \tag{8.19}$$

створюють фундаментальну систему розв'язків, оскільки легко обчислити, що їх вронськіан $W\left(x\right) = -2i\beta e^{2\alpha x} \neq 0$. Принципово загальний розв'язок в цьому випадку можна записати як звичайно у вигляді суперпозиції (8.14) знайдених розв'язків. Однак, такий розв'язок є функцією від комплексної змінної, хоча вихідне рівняння (8.15) є дійсним.

Підкреслимо, що функції від комплексної змінної вивчаються далі.

Тому зручніше застосувати принцип суперпозиції, щоб дістати дійсні фундаментальні розв'язки, а саме

$$Y_1 = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2\right);\ Y_2 = \frac{1}{2i}\left(y_1 - y_2\right).$$

Підставивши сюди вирази (8.19), матимемо

$$Y_1 = \frac{1}{2}e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$Y_2 = \frac{1}{2i}e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right) = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{8.20}$$

Тут ми скористалися формулами Ейлера: $\cos a = \frac{1}{2}\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)$ та $\sin a = \frac{1}{2i}\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)$. Розв'язки Y_1 і Y_2 також створюють фундаментальну систему. Дійсно для вронськіана розв'язків Y_1 і Y_2 маємо

$$W = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ \alpha Y_1 - \beta Y_2 & \alpha Y_2 + \beta Y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ -\beta Y_2 & \beta Y_1 \end{vmatrix} = \beta\left(Y_1^2 + Y_1^2\right) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 .$$

Отже, загальний розв'язок з врахуванням (8.20) має вигляд:

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right). \tag{8.21}$$

З цього співвідношення випливає, зокрема, що коли корені суто уявні, тобто $\alpha = 0$, то загальний розв'язок дістаємо безпосередньо з (8.21):

$$y = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x .$$

Приклад. Розглянемо рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$. Отже згідно з формулою (8.17) загальний розв'язок є $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Приклад. Маємо рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$, його корені $k_1 = k_2 = 2$. Тоді згідно з (8.18) $y = \left(c_1 + c_2 x\right)e^{2x}$ є загальним розв'язком.

Приклад. Розглянемо рівняння $4y'' - 8y' + 5y = 0$, характеристичне рівняння якого $4k^2 - 4k + 5 = 0$ має комплексні корені $k_1 = 1 + \frac{1}{2}i$ і $k_2 = 1 - \frac{1}{2}i$. Таким чином, $\alpha = 1$ і $\beta = \frac{1}{2}$. Згідно з (8.21) $y = e^x\left(c_1 \cos\frac{x}{2} + c_2 \sin\frac{x}{2}\right)$ є загальним розв'язком.

8.7 Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР) другого порядку (див. формулу (8.7))

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = b(x). \tag{8.22}$$

Нам вже відомо з попереднього розділу, що загальний розв'язок ЛОДР

$$a_0(x)\,y'' + a_1 y' + a_2(x)\,y = 0 \tag{8.23}$$

має вигляд суперпозиції фундаментальної системи розв'язків, яку запишемо так:

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Тепер шукатимемо розв'язок ЛНДР (8.22).

<u>Теорема</u>. Якщо $\overline{y}(x)$ – частинний розв'язок рівняння (8.22), а $Y(x)$ – загальний розв'язок рівняння (8.23), то

$$y = \overline{y}(x) + Y(x) \tag{8.24}$$

є загальним розв'язком ЛНДР (8.22).

Доведення. Надалі для скорочення запису будемо спускати аргументи функцій $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$. Введемо замість Y нову функцію $u = u(x)$ і запишемо $y = u + \overline{y}$. Підставляючи $y = u + \overline{y}$ до рівняння (8.22), дістанемо

$$\left[a_0 u'' + a_1 u' + a_2 u\right] + \left[a_0 \overline{y}'' + a_1 \overline{y} + a_2 y\right] = b(x).$$

В силі того, що $\overline{y}$ є частинним розв'язком рівняння (8.22), маємо замість одного рівняння два:

$$a_0 \overline{y}'' + a_1 \overline{y}' + a_2 \overline{y} = b(x),$$

$$a_0 u'' + a_1 u' + a_2 u = 0.$$

А останнє рівняння є ЛОДР (8.23), загальним розв'язком якого є функція $Y(x)$. Якщо $Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, то вираз

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \overline{y}(x), \tag{8.25}$$

де c_1 і c_2 – сталі, якраз й надає загальний розв'язок ЛНДР (8.22).

Теорему доведено.

Розглянемо загальний метод знаходження частинного розв'язку $\overline{y}(x)$ ЛНДР (8.22) і покажемо, що знаючи фундаментальну систему розв'язків $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ ЛОДР (8.23), можна обчислити частинний розв'язок ЛНДР (8.22). Для цього застосовують ***метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)***.

Нехай маємо загальний розв'язок $Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ЛОДР (8.23). Розв'язок ЛНДР (8.22) шукатимемо у тому ж вигляді, вважаючи величини c_1 і c_2 не сталими, а функціями від x, які й треба знайти, тобто

$$y = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x). \tag{8.26}$$

Оскільки тут дві невідомі функції $v_1(x)$ і $v_2(x)$, а рівняння (8.22) тільки одне, то обмежимо функції $v_1(x)$ і $v_2(x)$ додатковою умовою (знову спускаємо запис змінної x)

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0. \tag{8.27}$$

Далі побачимо, як "спрацює" ця умова. Диференціюючи вираз (8.26), матимемо

$$y' = v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_1 y_1' + v_2 y_2',$$

але в силі умови (8.27) дістаємо $y' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$. Таким чином, можна написати:

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2,$$

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2',$$

$$y'' = v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + v_1' y_1' + v_2' y_2'.$$

Помноживши y на $a_2(x)$, y' на $a_1(x)$, y'' на $a_0(x)$ і додавши добутки, знайдемо ліву частину ЛНДР (8.22):

$$v_1\left[v_1 y''+v_2 y_2''+v_1' y_1'+v_2' y_2'\right]+a_1\left[v_1 y_1'+v_2 y_2'\right]+a_2\left[v_1 y_1+v_2 y_2\right]=b(x).$$

Перегрупувавши доданки, здобудемо

$$v_1\left[a_0 y_1''+a_1 y_1'+a_2 y_1\right]+v_2\left[a_0 y_2''+a_1 y_2'+a_2 y_2\right]+a_0\left[v_1' y_1'+v_2' y_2'\right]=b(x).$$

Але за умови, що функції y_1 і y_2 є суто розв'язками ЛОДР (8.23), перші два доданки обертаються на нуль. Враховуючи умову (8.27), остаточно дістаємо

$$\begin{cases} v_1'(x)\,y_1(x)+v_2'(x)\,y_2(x)=0, \\ v_1'(x)\,y_1'(x)+v_2'(x)\,y_2'(x)=\dfrac{b(x)}{a_0(x)}. \end{cases} \tag{8.28}$$

Таким чином, маємо лінійну систему двох рівнянь з двома невідомими функціями $v_1'(x)$ і $v_2'(x)$ (всі інші функції тут відомі). Система (8.28) має єдиний розв'язок в силі того, що детермінант системи (8.28) дорівнює детермінанту Вронського, який відрізняється від нуля, оскільки функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ створюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР (8.23). Обчислюючи функції $v_1'(x)$ і $v_2'(x)$ з системи (8.28), інтегруючи їх, дістанемо функції $v_1(x)$ і $v_2(x)$, які будуть звичайно містити сталі c_1 і c_2. Далі, згідно з рівністю (8.26), визначається загальний розв'язок ЛНДР (8.22), а саме

$$y=\left[c_1+v_1(x)\right]y_1(x)+\left[c_2+v_2(x)\right]y_2(x). \tag{8.29}$$

Отже формула (8.29) і вирішує у принципі знаходження загального розв'язку ЛНДР другого порядку.

8.8 ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Якщо в ЛНДР (8.22) вважати функції $a_0(x)$, $a_1(x)$ і $a_2(x)$ сталими, то дістаємо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами, яке запишемо у вигляді:

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{8.30}$$

де p і q – сталі, а $f(x)$ – відома функція. З попереднього розділу відомо, що загальний розв'язок ЛНДР (8.30) є сумою загального розв'язку ЛОДР зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+py'+qy=0 \tag{8.31}$$

і частинного розв'язку рівняння (8.30). Отже, застосовуючи метод Лагранжа для обчислення частинного розв'язку і додаючи загальний розв'язок рівняння (8.31), можна знайти загальний розв'язок рівняння (8.30).

Проте, для деяких ЛНДР (8.30), права частина яких, тобто функція $f(x)$, має спеціальний вигляд, існує простіший метод розв'язання, а саме ***метод підбору форми частинного розв'язку***, або ***метод невизначених коефіцієнтів***.

Нижче вкажемо без доведення, в якій формі слід шукати частинний розв'язок ЛНДР (8.30), в залежності від того, який вигляд має функція $f(x)$. Тут можливі три випадки, які й розглянемо окремо.

1. Нехай $f(x)=Q_n(x)=\alpha_0 x^n+\alpha_1 x^{n-1}+...+\alpha_{n-1}x+\alpha_n$, тобто функція $f(x)$ є поліномом n-го степеня. У такому разі частинний розв'язок $\overline{y}$ рівняння (8.30) слід шукати у вигляді

$$\overline{y}=P_n(x)\cdot x^r, \tag{8.32}$$

де $P_n(x)=\beta_0 x^n+\beta_1 x^{n-1}+...+\beta_{n-1}x+\beta_n$, а число r визначає кількість коренів характеристичного рівняння

$$k^2+pk+q=0,$$

значення яких дорівнює нулю. Підкреслимо, що $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$ є відомі числа, а числа $\beta_0,\beta_1,...,\beta_n$ треба знайти з умови, що вираз (8.32) задовольняє рівнянню (8.30).

Приклад. Розв'язати рівняння $y''-3y'+2y=5x-3$, тобто $\alpha_0=5$, $\alpha_1=-3$. Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння $y''-3y'+2y=0$. Згідно з викладеним раніше запишемо характеристичне рівняння $k^2-3k+2=0$, яке має корені $k_1=1$ і $k_2=2$. Тоді розв'язок однорідного рівняння має вигляд $Y=c_1e^x+c_2e^{2x}$. Оскільки $r=0$ (немає коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють нулю), то згідно з (8.32) частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $\overline{y}=Ax+B$. Обчислимо $\overline{y}'=A$, $\overline{y}''=0$ і, підставляючи їх та $\overline{y}$ до вихідного рівняння, дістанемо рівність $-3A+2(Ax+B)=5x-3$, яка повинна справджуватися $\forall x$. Тоді, порівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях x (а саме $x^1=x$ і $x^0=1$), дістанемо систему рівнянь для знаходження чисел A і B:

$$\begin{cases} 2A=5, \\ -3A+2B=-3. \end{cases}$$

Розв'язок дає $A=\dfrac{5}{2}$, $B=\dfrac{9}{4}$ і таким чином частинний розв'язок має вигляд $\overline{y}=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{9}{4}$, а для загального розв'язку $y=Y+\overline{y}$ дістаємо вираз:

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{5}{2}x+\frac{9}{4}.$$

2. Нехай права частина (8.30) є

$$f(x)=e^{\gamma x}P_n(x).$$

Тоді частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{\gamma x} P_n(x) x^r, \tag{8.33}$$

де $Q_n(x)$ і $P_n(x)$ є поліномами (як і у першому випадку), а r є кількістю коренів характеристичного рівняння, значення яких збігається з числом γ.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = e^x(x+2)$, в якому $f(x) = e^x(x+2)$, тобто $\gamma = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$. Розв'язуємо рівняння $y'' - 3y' + 2 = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$. В цьому разі $k_1 = \gamma = 1$, отже частинний розв'язок згідно з (8.33) шукатимемо з врахуванням того, що $r = 1$, тобто у вигляді:

$$\overline{y} = e^x(Ax + B)x = e^x(Ax^2 + Bx).$$

Обчислюємо похідні: $\overline{y}' = e^x\left[Ax^2 + Bx + 2Ax + B\right]$, $\overline{y}'' = e^x\left[Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A\right]$. Підставляючи $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ до вихідного рівняння і скорочуючи на $e^x \neq 0$, дістанемо рівність:

$$Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A - 3\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B\right) + 2\left(Ax^2 + Bx\right) = x + 2,$$

або після знищення подібних $-2Ax + 2A - B = x + 2$. З порівняння коефіцієнтів при різних степенях x дістанемо систему:

$$\begin{cases} -2A = 1, \\ 2A - B = 2, \end{cases}$$

з якої знаходимо $A = -\dfrac{1}{2}$ і $B = -3$. Отже загальний розв'язок набирає вигляду:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)e^x.$$

3. Нехай $f(x) = M\cos bx + N\sin bx$, де M, N і b є даними числами. Тоді частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$\overline{y} = \left(A\cos bx + B\sin bx\right)x^r, \tag{8.34}$$

де число r є кількістю коренів характеристичного рівняння, значення яких дорівнюють $ib = b\sqrt{-1}$, а числа A і B є невизначені коефіцієнти.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 4\cos x$, в якому $f(x) = 4\cos x$ і тому $M = 4$, $b = 1$, $N = 0$. Корені характеристичного рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ є $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$, і тому $r = 0$. Частинний розв'язок $\overline{y}$ згідно з (8.34) шукатимемо у вигляді:

$$\overline{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Знаходимо похідні:

$$\overline{y}' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$\overline{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Підставляючи ці вирази до вихідного рівняння, маємо

$$-A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x + 2A\cos x + 2B\sin x = 4\cos x,$$

$$\left(A-3B\right)\cos x + \left(3A+B\right)\sin x = 4\cos x.$$

Це рівняння має справджуватися $\forall x$ і тому дорівнюємо відповідні коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$. У результаті дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A-3B=4, \\ 3A+B=0, \end{cases}$$

відкіля $A=\frac{2}{5}$, $B=-\frac{6}{5}$ і, отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{2}{5}\cos x - \frac{6}{5}\sin x.$$

Розглянуті три випадки за суттю вичерпують варіанти, в яких можна застосовувати метод невизначених коефіцієнтів. Однак існує теорема.

<u>Теорема</u>. Якщо $\overline{y}_1$ є частинним розв'язком рівняння

$$y'' + py' + q = f_1\left(x\right),$$

а $\overline{y}_2$ є частинним розв'язком рівняння

$$y'' + py' + q = f_2\left(x\right),$$

то частинний розв'язок рівняння

$$y'' + py' + q = f_1\left(x\right) + f_2\left(x\right)$$

має вигляд $\overline{y}_1 + \overline{y}_2$.

<u>Доведення</u> теореми здійснюється безпосередньою підстановкою.
Використання останньої теореми значно поширює коло ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, які можна розв'язувати за допомогою методу невизначених множників. У всіх інших випадках треба застосувати загальну теорію, викладену у попередньому розділі.

Контрольні запитання до розділу 8

1. Загальний вигляд диференціального рівняння 2-го порядку.
2. Розв’язання деяких диференціальних рівнянь шляхом зниження порядку.
3. Розв’яжіть рівняння $yy'' + y'^2 = 0$.
4. Розв’яжіть рівняння $4y'' = y'$.
5. Наведіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння другого порядку.
6. Що таке лінійне диференціальне рівняння?
7. Принцип суперпозиції розв’язків диференціальних рівнянь.
8. Теорема Ліувілля-Вронського.
9. Структура загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР).
10. Характеристичне рівняння ЛОДР зі сталими коефіцієнтами. Загальний розв’язок.
11. Структура загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР)
12. ЛНДР зі сталими коефіцієнтами.
13. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y'' - 10y' + 25 = 0$.

14. Структура загального розв’язку ЛНДР другого порядку.
15. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $2y'' + y' - y = 2e^{x}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемышев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 176 с.
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1975.
5. Кулешов М.М., Ольшанський В.П., Стельмах О.А. Елементи лінійної алгебри й аналітичної геометрії. – Харків: АПБУ, 2002.
6. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1986. – 480 с.
7. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 2 т. – М.: Наука, 1985, т.1.
9. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1978.
10. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1970. – Т. 1.
11. Шкіль М.І., Сотніченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1992.

Вища математика
Навчальний посібник

Укладачі: **Басманов Олексій Євгенович**
Кириченко Ігор Костянтинович
Мігунова Лариса Василівна
Сознік Олександр Петрович

Редактор Філіна Т.О.
Коректор Хорошилова К.В.

Підп. до друк. 21.01.03 Формат 60x84 1/16
Друк – ризограф Умовн.-друк. арк. 12,5
Тираж 500 прим. Вид.№ 3/01 Зам.№

Дільниця оперативної поліграфії АПБ України
61023 м. Харків, вул. Чернишевського, 94